ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

551

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

I

SUR LES ESPACES A STRUCTURE UNIFORME ET SUR LA TOPOLOGIE GÉNÉRALE

PAR

ANDRÉ WEIL

PARIS
HERMANN & Cie, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6

1937

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

551

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

I

SUR LES ESPACES A STRUCTURE UNIFORME ET SUR LA TOPOLOGIE GÉNÉRALE

PAR

ANDRÉ WEIL

PARIS
HERMANN & C^ie^, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6

—

1938

On sait que la notion de distance est utilisée dans de nombreux travaux de topologie (par exemple ceux d'Alexandroff et de son école), et l'on s'explique mal qu'elle soit venue à jouer un pareil rôle dans une branche des mathématiques où elle n'est, à proprement parler, qu'une intruse. Son emploi repose d'ailleurs sur les résultats d'Alexandroff et Urysohn, d'après lesquels il est possible de l'introduire dans tout espace localement compact, pourvu que celui-ci satisfasse au IIe axiome de dénombrabilité : on voit apparaître ici cette hypothèse du dénombrable (dite aussi, on ne sait pourquoi, de séparabilité), malfaisant parasite qui infeste tant de livres et de mémoires dont il affaiblit la portée tout en nuisant à une claire compréhension des phénomènes. Non seulement, en effet, la conscience d'un mathématicien, s'il en possède, doit répugner à faire intervenir une hypothèse superflue et étrangère à la question qu'il a en vue, mais encore on s'aperçoit de plus en plus que les espaces de caractère non dénombrable peuvent fournir souvent des moyens techniques précieux dont il est maladroit de se priver. Naturellement, lorsqu'on quitte le dénombrable, il n'est plus légitime de faire des notions de suite et de limiter l'outil essentiel, et on doit les remplacer par d'autres dont le champ d'action soit moins restreint. A plus forte raison faudra-t-il abandonner la notion de distance ; et il convient de se demander ce qu'on pourra lui substituer.

Or, quand on essaye de raisonner sur les groupes topologiques, on s'aperçoit vite qu'on y retrouve, sans qu'ils soient en général métrisables, beaucoup des propriétés connues des espaces métriques ; et en effet, toutes ces propriétés ont une origine commune, qui est simplement la possibilité de comparer entre eux les voisinages donnés en tous les points de l'espace. Il n'en faut pas plus, en réalité, pour établir presque toutes les propriétés essentielles des espaces métriques : c'est ce que je me propose de faire voir

dans le présent mémoire, après avoir formulé au § 1 le système d'axiomes auquel on se trouve tout naturellement conduit. J'appelle *uniformes* les espaces satisfaisant à ces axiomes, qui sont ceux où la notion de continuité uniforme a un sens : on a là une structure, beaucoup plus faible qu'une structure métrique, mais plus forte qu'une structure topologique ; d'ailleurs la structure topologique des espaces ainsi définis n'est pas quelconque : on trouve en effet, grâce à une idée de Pontrjagin qui joue un rôle important dans cette théorie, que ces espaces sont toujours complètement réguliers : ce théorème, et la théorie des espaces uniformes complets, forment l'objet du § 2. J'étudie ensuite (§§ 3 et 4), du point de vue de leur structure uniforme, les espaces compacts et localement compacts. Le § 5 donne l'application de ces résultats à la théorie des groupes topologiques ; le § 6 indique un autre aspect de la théorie des espaces uniformes, qui permet, je crois, de mieux comprendre le rôle que jouent, principalement depuis les travaux d'Alexandroff, les méthodes combinatoires dans l'étude des espaces compacts et localement compacts. Enfin ce travail se termine (§ 7) par quelques réflexions sur les axiomes en usage en topologie, qui aideront peut-être à distinguer parmi ces axiomes ceux qui n'ont qu'un intérêt historique ou de curiosité de ceux qui sont vraiment féconds (1).

1. Définitions et premiers exemples. — En raison de la multiplicité des systèmes d'axiomes en usage, il ne sera pas inutile d'abord de formuler ceux que nous suivons. Par un *espace topologique* j'entends un ensemble E où se trouve donnée une famille de sous-ensembles, dits *ensembles ouverts*, satisfaisant à l'axiome suivant :

(O_I) *Toute réunion d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.*

De plus, tous les espaces que nous considérerons satisferont aussi aux axiomes suivants :

(O_{II}) *Toute intersection d'ensembles ouverts en nombre fini est un ensemble ouvert.*

---

(1) Depuis la rédaction de ce travail, H. Cartan a découvert la notion de *filtre* (*C. R.*, t. 205 (1937), pp. 595 et 777), qui élimine définitivement le dénombrable de la topologie générale en se substituant à la notion de suite, et permet d'apporter d'importantes simplifications à la théorie des espaces uniformes et à celle des espaces compacts.

(O_{III}) *Quel que soit l'élément p de* E, E — $\{p\}$ *est un ensemble ouvert.*

La réunion d'une famille vide étant l'ensemble vide, et l'intersection d'une famille vide de parties de E étant E, il résulte de O_I et O_{II} que E et l'ensemble vide sont ouverts.

Ayant à nous servir aussi de la définition d'une topologie par des voisinages, nous allons donner les axiomes correspondants ; nous n'astreindrons pas nos voisinages à être des ensembles ouverts, suivant en cela Fréchet plutôt que Hausdorff. Par un *voisinage* d'un point p, dans un espace défini comme plus haut, nous entendons tout ensemble dont p est un point intérieur (c'est-à-dire qui contient un ensemble ouvert contenant p). Une famille de voisinages d'un point p sera appelée un *système fondamental de voisinages* pour ce point si tout voisinage de p contient un voisinage de la famille ; la famille de tous les ensembles ouverts contenant p constitue un exemple d'un tel système ; et si l'on se donne deux systèmes fondamentaux pour un même point, tout voisinage du premier système contient au moins un voisinage du second, et inversement : on dit que deux tels systèmes sont équivalents.

Supposons maintenant que dans un ensemble fondamental E l'on fasse correspondre à tout élément p une famille d'ensembles $V(p)$, qui sera le système de voisinages attaché à p, de façon à satisfaire aux axiomes suivants :

(V_I) *Tout* $V(p)$ *contient* p.

($V_{I'}$) *A tout* $V(p)$ *du système attaché à* p, *on peut faire correspondre un* $V'(p)$ *du même système, tel que* $V(p)$ *contienne au moins un* $V''(q)$ *du système attaché à chacun des éléments* q *de* $V'(p)$.

Cela étant, on dira qu'un ensemble est *ouvert* s'il contient au moins un $V(p)$ du système attaché à chacun de ses points p ; (O_I) est satisfait ; quant à (V_I), ($V_{I'}$), ils signifient que dans la topologie qu'on vient de définir p est bien un point intérieur de chacun des $V(p)$ du système qui lui est attaché ; il est clair alors que les $V(p)$ forment un système fondamental pour p ; il est clair aussi que si l'on remplace les systèmes $V(p)$ par d'autres systèmes d'ensembles attachés aux éléments p de E, et satisfaisant encore aux axiomes ci-dessus, les nouveaux systèmes définissent la même topologie que les premiers dans E s'ils leur sont respectivement équivalents, et dans ce cas seulement. Pour que les axiomes (O_{II}), (O_{III}) soient respectivement satisfaits, il faut et il suffit que les suivants le soient :

(V_{II}) *Toute intersection d'ensembles* V (p) *en nombre fini du système attaché à p contient un ensemble de ce système.*

(V_{III}) *Quels que soient p, q distincts dans* E, *il y a un* V(p) *du système attaché à p tel que* $q \notin V(p)$ [1].

Un espace topologique E étant donné, l'intersection des ensembles ouverts de E avec un sous-ensemble A arbitrairement donné dans E forme une famille de sous-ensembles de A qui satisfait à (O_I), et détermine donc une topologie dans A ; on dira que celle-ci est *induite* dans A par celle de E ; les axiomes II, III sont satisfaits dans A s'ils le sont respectivement dans E.

Un espace E est dit *compact* s'il satisfait, non seulement aux axiomes I, II, III ci-dessus, mais encore aux deux suivants (dont le premier entraîne d'ailleurs (O_{III})) :

(O_{IV}) *Quels que soient p, q distincts dans* E, *il existe deux ensembles ouverts sans point commun qui contiennent respectivement p et q.*

(C) *De toute famille d'ensembles ouverts ayant pour réunion* E, *on peut extraire une famille finie ayant la même propriété.*

Un ensemble *fermé* F, dans un espace E, sera dit *compact* si c'est un espace compact dans la topologie induite sur lui par celle de E. Si un ensemble A, dans un espace E, a pour *fermeture* un ensemble compact, c'est-à-dire si le plus petit ensemble fermé $\overline{A}$ contenant A est compact, A sera dit *relativement compact par rapport à l'espace* E, ou simplement *compact* chaque fois qu'il n'y aura pas de confusion possible en ce qui concerne E.

Ces définitions, qui pour une part s'écartent des usages établis, appelleraient quelques remarques ; mais celles-ci trouveront mieux leur place en un autre lieu. Nous sommes maintenant à même d'aborder l'objet propre de ce travail.

On dira que dans un ensemble E on a défini un *système uniforme de voisinages* si l'on a fait correspondre à tout α pris dans un certain ensemble (non vide) d'indices, et à tout élément p de E,

---

[1] Nous notons par le signe $\cap$ l'intersection, par $\cup$ la réunion de deux ensembles ; par $\bigcap_\alpha A_\alpha$ l'intersection, par $\bigcup_\alpha A_\alpha$ la réunion, d'une famille d'ensembles A_α ; par $\complement(A)$ le complémentaire d'un ensemble A ; les signes $\supset$, $\subset$, $\in$ signifient, comme d'habitude, « contient », « contenu dans », « élément de » ; les signes $\not\supset$, $\not\subset$, $\notin$ en sont les négations. Ces notations, de même que toutes les notations et définitions de ce mémoire, sont conformes à l'usage de N. Bourbaki et de ses collaborateurs.

un sous-ensemble $V_\alpha(p)$ de E, qui sera dit *le voisinage de p d'indice* α, et si les axiomes que voici sont satisfaits :

(U_I) *Quels que soient* p *et l'indice* α, *on a* $p \in V_\alpha(p)$; *quels que soient* p, q *distincts dans* E, *il y a un indice* α *tel que* $q \notin V_\alpha(p)$.

(U_{II}) *Quels que soient les indices* α, β, *il y a un indice* γ *tel que* $V_\gamma(p) \subset V_\alpha(p) \cap V_\beta(p)$ *quel que soit* p.

(U_{III}) *A tout indice* α *on peut faire correspondre un indice* β *tel que les deux relations* $p \in V_\beta(r)$, $q \in V_\beta(r)$ *entraînent* $q \in V_\alpha(p)$.

D'après (U_{III}), on peut, à l'indice β, faire correspondre γ tel que les relations $r \in V_\gamma(s)$, $p \in V_\gamma(s)$ entraînent $p \in V_\beta(r)$; en particulier, pour $s = p$, on voit qu'alors $r \in V_\gamma(p)$ entraîne $p \in V_\beta(r)$. Si donc α et β sont choisis comme dans (U_{III}) et γ comme on vient de le dire, les relations $r \in V_\gamma(p)$, $q \in V_\beta(r)$ entraîneront $q \in V_\alpha(p)$: autrement dit, quel que soit r dans $V_\gamma(p)$, on aura $V_\beta(r) \subset V_\alpha(p)$. Les $V_\alpha(p)$ satisfont donc à l'axiome (V_I), et évidemment à tous les autres axiomes (V), de sorte qu'ils définissent une topologie dans E.

Il est utile d'exprimer autrement les définitions ci-dessus, en se servant des notations de la théorie des correspondances. Soit $E^2 = E \times E$ le produit de E par lui-même, c'est-à-dire l'ensemble des couples (p, q) de deux éléments de E ; les éléments (p, q) et (q, p) sont considérés comme distincts si $p \neq q$. Tout sous-ensemble C de E^2 définit une correspondance entre éléments de E : C étant donné, on fera correspondre à tout élément p de E tous les éléments q de E tels que (p, q) soit dans C ; l'ensemble de ces éléments q sera noté $C(p)$, et plus généralement, si A est un sous-ensemble quelconque de E, l'ensemble des points q qui correspondent aux points p de A sera noté $C(A)$: c'est la réunion des $C(p)$ quand p décrit A. Nous noterons par Δ l'ensemble de tous les éléments (p, p) de E^2 (éléments « diagonaux ») : il définit la transformation identique. Si C et D sont deux sous-ensembles de E^2, nous désignerons par CD l'ensemble tel que l'on ait, quel que soit p, $CD(p) = C[D(p)]$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les éléments (p, r) de E^2 tels qu'on puisse choisir q dans E de façon à avoir à la fois $(p, q) \in C$ et $(q, r) \in D$: c'est la règle habituelle pour le produit de deux correspondances, et ce produit est associatif ; Δ joue, par rapport à ce produit, le rôle d'un élément unité : on a toujours $C\Delta = \Delta C = C$; de plus, si $C \subset C'$, $D \subset D'$, on a $CD \subset C'D'$. Le transformé de C dans la transformation de E^2 en lui-même qui,

à tout élément (p, q), fait correspondre l'élément (q, p) sera désigné par $\overset{-1}{C}$; si $F = CD$, on a $\overset{-1}{F} = \overset{-1}{D}\overset{-1}{C}$.

Nous pouvons maintenant désigner par V_α l'ensemble des éléments (p, q) de E^2 tels que $q \in V_\alpha(p)$: car avec cette notation, l'ensemble $V_\alpha(p)$, au sens de la théorie des correspondances, n'est pas autre chose que le voisinage $V_\alpha(p)$ dont on est parti. Au lieu de se donner le système des voisinages $V_\alpha(p)$ dans E, il revient évidemment au même de se donner la famille des ensembles V_α dans E^2 ; ceux-ci doivent satisfaire aux axiomes que voici, respectivement équivalents aux axiomes (U) :

(U'_{I}) *On a* $\bigcap_\alpha V_\alpha = \Delta$.

(U'_{II}) *Quels que soient* α, β, *il y a* γ *tel que* $V_\gamma \subset V_\alpha \cap V_\beta$.

(U'_{III}) *A tout* α *on peut faire correspondre* β *tel que* $V_\beta \overset{-1}{V_\beta} \subset V_\alpha$.

Tout sous-ensemble W de E^2 contenant l'un des V_α sera appelé un *entourage* de Δ dans E^2 ; on dira qu'une propriété des couples (p, q) est vérifiée dès que p, q sont suffisamment voisins l'un de l'autre si l'ensemble des couples (p, q) qui possèdent cette propriété constitue un entourage de Δ dans E^2 ; si W et W' sont de tels entourages, $W \cap W'$, ainsi que $\overset{-1}{W}$, en est un aussi. La famille de tous les entourages de Δ dans E^2 ne change pas si on remplace la famille des V_α par une famille d'ensembles V'_λ telle que tout V_α contienne un V'_λ et que tout V'_λ contienne un V_α : quand il en sera ainsi, on dira que les familles V_α, V'_λ sont *équivalentes* et qu'elles définissent dans E une même *structure uniforme* ; un espace E où a été définie, au moyen d'une telle famille V_α, une structure uniforme, sera appelé un *espace uniforme* : une structure uniforme, donnée dans un espace E, implique dans cet espace une structure topologique bien déterminée, celle qui est définie par les voisinages $V_\alpha(p)$. D'après la définition connue des produits topologiques, E^2 possède alors aussi une structure topologique bien déterminée.

D'après (U'_{III}), on peut, à tout α, faire correspondre β tel que $\overset{-1}{V_\beta} \subset V_\alpha$, et par suite aussi $V_\beta \subset \overset{-1}{V_\alpha}$: les deux familles V_α, $\overset{-1}{V_\alpha}$ sont donc équivalentes ; en particulier, l'ensemble $\overset{-1}{V_\alpha}(p)$ des ponits q

tels que $p \in V_\alpha(q)$ est un voisinage de p, et les $\overset{-1}{V}_\alpha(p)$ forment un système fondamental de voisinages de p. La famille $V'_\alpha = V_\alpha \cap \overset{-1}{V}_\alpha$ est aussi équivalente à la famille V_α ; on a d'ailleurs $V'_\alpha = \overset{-1}{V'_\alpha}$; on pourra donc supposer, chaque fois que ce sera commode, que la structure de E est définie par des V_α satisfaisant à la condition $V_\alpha = \overset{-1}{V}_\alpha$ (ensembles « symétriques par rapport à Δ »).

Soit maintenant M un sous-ensemble de E^2, et considérons l'ensemble $M'_{\alpha\beta} = V_\beta M \overset{-1}{V}_\alpha$. Si d'abord M se réduit à un seul point (a, b), $M'_{\alpha\beta}$ est l'ensemble des points (p, q) tels que $p \in V_\alpha(a)$, $q \in V_\beta(b)$: c'est donc un voisinage de (a, b), et les $M'_{\alpha\beta}$ forment, quand on donne à α, β toutes les valeurs possibles, un système fondamental de voisinages de (a, b). Il s'ensuit que si M est quelconque, $M'_{\alpha\beta}$ contient un voisinage de chacun des points de M, donc un ensemble ouvert contenant M. D'autre part, pour qu'un point (p, q) appartienne à la fermeture $\overline{M}$ de M, il faut et il suffit qu'il y ait, quels que soient α, β, un point (a, b) de M tel que $a \in \overset{-1}{V}_\alpha(p)$, $b \in \overset{-1}{V}_\beta(q)$, c'est-à-dire tel que $p \in V_\alpha(a)$, $q \in V_\beta(b)$: mais s'il en est ainsi on a $(p, q) \in M'_{\alpha\beta}$, et réciproquement, et par conséquent $\overline{M} = \bigcap_{\alpha,\beta} M'_{\alpha\beta}$. On voit de même, si A est un sous-ensemble quelconque de E, que $V_\alpha(A)$ contient un ensemble ouvert contenant A, et que $\overline{A} = \bigcap_\alpha V_\alpha(A)$.

De là résulte, par exemple, qu'on peut toujours remplacer la famille V_α par une famille équivalente composée, soit d'ensembles fermés, soit d'ensembles ouverts. On déduit facilement, en effet, des axiomes (U′), qu'à tout α on peut faire correspondre un β tel que $V_\beta V_\beta \overset{-1}{V}_\beta \subset V_\alpha$: on a alors, d'après ce qui précède, $V_\beta \subset \overline{V}_\beta \subset V_\alpha$, et par suite les familles V_α et $\overline{V}_\alpha$ sont équivalentes. De même, si Ω_α désigne le plus grand ensemble ouvert contenu dans V_α (c'est-à-dire l'ensemble des points intérieurs de V_α), on a

$$V_\beta \subset \Omega_\alpha \subset V_\alpha,$$

de sorte que les familles V_α, Ω_α sont équivalentes.

L'exemple le plus connu d'une structure uniforme est fourni par les espaces métriques : E étant un tel espace, où est donnée une distance $\delta(p, q)$ satisfaisant aux axiomes habituels, soit α un nombre positif quelconque : on désignera par V_α l'ensemble des points (p, q) de E^2 tels que $\delta(p, q) < \alpha$; $V_\alpha(p)$ sera donc la sphère de centre p et de rayon α ; tous les axiomes (U′) sont satisfaits ; en particulier, on a $V_\alpha V_\beta \subset V_{\alpha+\beta}$ d'après l'inégalité du triangle. Si d'ailleurs les ε_ν forment une suite de nombres positifs tendant vers O, les V_{ε_ν} forment une famille équivalente à la famille de tous les V_α : c'est dans ce fait qu'il faut chercher la raison du rôle joué par les hypothèses de dénombrabilité dans la théorie des espaces métrisables.

Un exemple, plus intéressant pour nous, de structure uniforme, est fourni par les groupes topologiques. Par un groupe topologique, j'entends un groupe G où est définie une topologie satisfaisant aux axiomes (O), et telle que la fonction $\Phi(x, y) = yx^{-1}$ soit une fonction continue de (x, y) dans G^2. Suivant l'usage, si A et B sont deux sous-ensembles d'un groupe G, je désigne par AB l'ensemble de tous les produits d'un élément de A par un élément de B ; si B se réduit à un seul élément x, le même ensemble sera noté Ax ; de plus, le transformé de A dans la transformation $(x \to x^{-1})$ sera noté $\overset{-1}{A}$. S. alors, dans un groupe topologique, on considère un système fondamental V_α de voisinages de l'élément unité e, et qu'on pose $V'_\alpha(x) = V_\alpha x$, les $V'_\alpha(x)$ forment dans G un système uniforme de voisinages, satisfaisant aux axiomes (U) : car (U_I), (U_{II}) résultent des axiomes topologiques généraux, et (U_{III}) équivaut à la continuité de la fonction $\Phi(x, y)$ au point (e, e) ; tout groupe topologique peut donc être considéré comme espace uniforme.

Il est utile d'observer que le calcul sur les sous-ensembles d'un groupe G peut être considéré comme un cas particulier du calcul défini plus haut pour les correspondances, c'est-à-dire pour les sous-ensembles d'un ensemble $E^2 = E \times E$. Faisons en effet correspondre à tout sous-ensemble A de G son *image inverse* $A' = \overset{-1}{\Phi}(A)$ dans G^2 au moyen de Φ, c'est-à-dire l'ensemble des éléments (x, y) de G^2 tels que $yx^{-1} \in A$: on vérifie facilement que si, dans G, $C = AB$, on a $C' = A'B'$ dans G^2, et réciproquement ; que

si $D = \overset{-1}{A}$ dans G, on a $D' = \overset{-1}{A'}$ dans G^2, et réciproquement ; que $Ax = A'(x)$, et en général $AB = A'(B)$. Évidemment aussi $\Delta = \overset{-1}{\Phi}(e)$.

Ce qui précède nous permet, en vue d'applications ultérieures, de mettre les axiomes des groupes topologiques sous la forme suivante. Un groupe G sera dit un groupe topologique si l'on s'y est donné un système d'ensembles V_α, satisfaisant aux axiomes suivants :

(G_I) *On a* $\bigcap_\alpha V_\alpha = e$.

(G_{II}) *Quels que soient* α, β, *il y a* γ *tel que* $V_\gamma \subset V_\alpha \cap V_\beta$.

(G_{III}) *A tout* α *on peut faire correspondre un* β *tel que* $V_\beta \overset{-1}{V}_\beta \subset V_\alpha$.

(G_{IV}) *A tout* α *et à tout* x *dans* G *on peut faire correspondre un* β *tel que* $V_\beta \subset x^{-1}V_\alpha x$.

Les trois premiers, en effet, expriment que les $V'_\alpha = \overset{-1}{\Phi}(V_\alpha)$ satisfont aux axiomes (U′) ; en même temps, (G_{III}) entraîne que $\Phi(x, y)$ est continue au point (e, e). Cela étant, pour que Φ soit continue au point (a, b), il faut et il suffit qu'on puisse trouver β, γ tels que $x \in V_\beta a$, $y \in V_\gamma b$ entraînent $yx^{-1} \in V_\alpha ba^{-1}$, c'est-à-dire tels que $V_\gamma ba^{-1}\overset{-1}{V}_\beta \subset V_\alpha ba^{-1}$, ou en posant $c = ba^{-1}$, $V_\gamma c\overset{-1}{V}_\beta \subset V_\alpha c$: s'il en est ainsi, on aura *a fortiori* $c\overset{-1}{V}_\beta \subset V_\alpha c$, donc $\overset{-1}{V}_\beta \subset c^{-1}V_\alpha c$, et, si δ est pris tel que $V_\delta \subset \overset{-1}{V}_\beta$, $V_\delta \subset c^{-1}V_\alpha c$, de sorte que ($G_{IV}$) est satisfait ; et réciproquement, soit γ tel que $V_\gamma \overset{-1}{V}_\gamma \subset V_\alpha$, β tel que $V_\beta \subset c^{-1}V_\gamma c$, on aura $\overset{-1}{V}_\beta \subset c^{-1}\overset{-1}{V}_\gamma c$, et $V_\gamma c\overset{-1}{V}_\beta \subset V_\gamma \overset{-1}{V}_\gamma c \subset V_\alpha c$.

Des espaces uniformes définis, par exemple, au moyen d'une métrique ou d'une structure de groupe topologique, on peut en déduire d'autres par les procédés suivants. Tout d'abord, si E est un espace uniforme, défini par une famille V_α dans E^2 satisfaisant aux axiomes (U′), et si A est un sous-ensemble quelconque de E, les ensembles $V_\alpha \cap (A \times A)$ forment dans $A^2 = A \times A$ une famille qui satisfait aux axiomes (U′) ; et celle-ci est remplacée par une famille équivalente si on remplace la famille V_α par une autre équivalente : on définit donc ainsi sur A une structure uniforme bien déterminée, qu'on dira *induite* sur A par celle de E. En second lieu, soient E_i des ensembles quelconques, en nombre

fini ou non, et $E = \prod_i E_i$ leur produit direct ; on peut évidemment considérer $E^2 = E \times E$ comme le produit direct des E_i^2 ; supposons qu'on ait défini dans chacun des E_i une structure uniforme au moyen d'une famille d'entourages de l'ensemble Δ_i des éléments diagonaux de E_i^2 ; choisissons, de toutes les manières possibles, des indices $i_1, i_2, \ldots, i_n$ en nombre fini, et, dans chacun des $E_{i_\nu}^2$ correspondant à ces indices, un entourage V_ν de Δ_{i_ν} (au sens de la structure uniforme donnée dans E_{i_ν}) ; soit V l'ensemble des points de E^2 dont la projection sur $E_{i_\nu}^2$ est dans V_ν pour $\nu = 1, 2, \ldots n$: les ensembles V forment dans E^2 une famille qui satisfait aux axiomes (U′), comme on le vérifie facilement : la structure uniforme ainsi définie dans E sera appelée le produit des structures qu'on s'était données dans les E_i. On vérifie facilement aussi que la topologie déterminée dans E par la structure uniforme ainsi obtenue est la même que celle qu'on obtient en considérant E comme produit topologique des E_i ; et, de même, que si un groupe G est le produit direct de groupes topologiques G_i (en nombre fini ou infini), la structure uniforme de G, en tant que groupe topologique, telle que nous l'avons définie précédemment, n'est autre que le produit des structures uniformes des G_i.

Un cas particulier intéressant est celui du tore à un nombre quelconque (fini ou non, dénombrable ou non) de dimensions ; on appellera tore à l dimensions, l étant un cardinal quelconque, et on désignera par T_l, le produit direct de l groupes isomorphes au groupe additif des nombres réels modulo 1 ; autrement dit, Λ étant un ensemble de puissance l, T_l sera le groupe additif des fonctions $x(\lambda)$, définies dans Λ et prenant leurs valeurs dans l'ensemble des nombres réels modulo 1. On sait (1) que T_l est *compact*, et que tout espace compact, et plus généralement tout espace complètement régulier est homéomorphe à un sous-ensemble d'un T_l. D'autre part, d'après ce qui précède, on peut attribuer à tout T_l et à tout sous-ensemble d'un T_l une structure uniforme.

---

(1) A. Tychonoff, *Ueber die topologische Erweiterung von Räumen*, Math. Ann. t. 102 (1930), p. 544-561.

2. Théorie générale des espaces uniformes. — THÉORÈME I. — *Tout espace uniforme est complètement régulier.*

Rappelons qu'un espace est dit complètement régulier si l'on peut, à tout point p de cet espace et à tout voisinage V de p, faire correspondre une fonction à valeurs réelles $\geqslant 0$, définie et continue dans tout l'espace, prenant la valeur O en p et la valeur 1 en dehors de V.

La démonstration qu'on va lire de ce théorème est identique à celle qui en a été donnée pour les groupes topologiques par Pontrjagin (¹). Un point p et un voisinage $V(p)$ de ce point étant donnés dans E, on pourra, d'après les axiomes (U′) et les remarques du § 1, définir de proche en proche une suite d'entourages V_ν de Δ dans E^2 telle que l'on ait

$$V_0(p) \subset V(p), \qquad \overset{-1}{V_\nu} = V_\nu,$$
$$V_{\nu+1}V_{\nu+1} \subset V_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Soit $\tau = \sum_{\nu=0}^{r} \varepsilon_\nu/2^\nu$ une fraction dyadique finie, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, chacun des « chiffres » ε_ν étant égal à 0 ou 1 ; posons en général, quel que soit V dans E^2, $V^\varepsilon = \Delta$ si $\varepsilon = 0$, $V^\varepsilon = V$ si $\varepsilon = 1$; alors, faisons correspondre à τ l'ensemble $U_\tau = V_r^{\varepsilon_r}V_{r-1}^{\varepsilon_{r-1}}\cdots V_1^{\varepsilon_1}V_0^{\varepsilon_0}$; en d'autres termes, on aura $U_0 = \Delta$, et, si $\tau = \sum_{\nu=1}^{s} 2^{-n_\nu}$ et $n_1 < n_2 < \ldots < n_s$,

$$U_\tau = V_{n_s}V_{n_{s-1}}\cdots V_{n_2}V_{n_1}.$$

Si $\tau = k/2^m$, $\tau' = (k+1)/2^m$, k étant entier, on aura $U_{\tau'} \supset V_m U_\tau$: il en est bien ainsi, en effet, pour $m = 0$, de sorte que nous pouvons procéder par récurrence sur m ; c'est évident aussi lorsque k est pair, car alors on a même $U_{\tau'} = V_m U_\tau$, par définition ; soit donc $k = 2h + 1$, et $\tau'' = h/2^{m-1}$; le théorème étant supposé vrai pour $m - 1$, on a $U_{\tau'} \supset V_{m-1}U_{\tau''}$, donc (puisque $V_m V_m \subset V_{m-1}$)

(¹) Dans une lettre (inédite) à l'auteur, du 24 novembre 1936. Cf. aussi S. KAKUTANI, *Ueber die Metrisation der topologischen Gruppen*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, vol. 12, p. 82 (Avril 1936), où apparaît la même idée, et dont je suis le mode d'exposition.

$U_{\tau'} \supset V_m V_m U_{\tau''}$; mais $U_\tau = V_m U_{\tau''}$, de sorte qu'on a bien $U_{\tau'} \supset V_m U_\tau$. Il s'ensuit en particulier que l'on a $U_\tau \subset U_{\tau'}$ chaque fois que $\tau \leqslant \tau'$.

Soit alors q un point de E ; soit $f(q)$, pour $q \neq p$, la borne supérieure des valeurs de τ telles que $q \notin U_\tau(p)$; et soit $f(p) = 0$. Si q est en dehors de $V(p)$, il est *a fortiori* en dehors de $V_0(p) = U_1(p)$, donc $f(q) = 1$. Cette fonction est continue : soit en effet $\tau = k/2^m$, k étant entier, et $\tau' = (k+1)/2^m$; si $f(q) < \tau$ on a $q \in U_\tau(p)$; si de plus $r \in V_m(q)$, on aura $r \in V_m U_\tau(p) \subset U_{\tau'}(p)$, donc $f(r) \leqslant \tau'$; on voit de même que si $f(r) < \tau$ et $q \in V_m(r)$, $f(q) \leqslant \tau'$. Puisque $\overset{-1}{V}_m = V_m$, cela revient à dire que si $(q, r) \in V_m$, l'intervalle formé par $f(q)$, $f(r)$ ne peut contenir à son intérieur un intervalle tel que (τ, τ'), et par conséquent, à plus forte raison, que l'on a alors $|f(r) - f(q)| < 2^{-m+1}$: d'où résulte bien la continuité de f.

On voit même que la fonction $f(q)$ est *uniformément continue* si l'on définit cette notion, comme il est naturel à présent, de la manière suivante :

Soient E, E' deux espaces uniformes, dont les structures soient définies par deux familles V_α, V'_λ dans E^2 et E'^2 respectivement ; une fonction $p' = f(p)$, définie dans E, prenant ses valeurs dans E', sera dite *uniformément continue* dans E si, à tout indice λ, on peut faire correspondre un α de façon que $(p, q) \in V_\alpha$ entraîne $(p', q') \in V'_\lambda$.

On peut, en modifiant légèrement la définition de la fonction de Pontrjagin, la remplacer par une fonction continue à la fois par rapport à p et q. Soit Σ une suite d'entourages $V_0, V_1, \ldots$ de Δ dans E^2, satisfaisant toujours aux conditions

$$\overset{-1}{V}_\nu = V_\nu, \qquad V_{\nu+1} V_{\nu+1} \subset V_\nu ;$$

définissons U_τ comme plus haut. Soit alors $F_\Sigma(p, q)$ la borne supérieure des valeurs de τ telles que $(p, q) \notin U_\tau \overset{-1}{U}_\tau$ si $p \neq q$; et soit $F_\Sigma(p, p) = 0$. On vérifie comme plus haut que si $r \in V_m(p)$ et $s \in V_m(q)$, on a $| F_\Sigma(r, s) - F_\Sigma(p, q)) | < 2^{-m+1}$: F est donc une fonction uniformément continue de (p, q) dans E^2 (E^2 est un espace uniforme, en tant que produit $E \times E$). De plus, F est symétrique, c'est-à-dire que $F_\Sigma(p, q) = F_\Sigma(q, p)$; et si $F_\Sigma(p, q) < 2^{-m-1}$, on a $(p, q) \in V_{m+1} \overset{-1}{V}_{m+1} \subset V_m$.

De là on peut déduire que tout espace uniforme est isomorphe (au sens de la structure uniforme) à un sous-ensemble d'un produit d'espaces métriques. Soit en effet Σ_λ une famille de suites Σ d'entourages de Δ dans E^2, ayant les propriétés énoncées plus haut ; et supposons cette famille telle que tout entourage de Δ dans E^2 contienne l'un des termes de l'une des suites Σ_λ (ou en d'autres termes, que l'ensemble des termes des suites Σ_λ forme une famille d'entourages de Δ, équivalente à celle qui définit la structure uniforme de E) ; posons $F_{\Sigma_\lambda}(p, q) = \varphi_p^{(\lambda)}(q)$. Désignons, quel que soit λ, par $\mathcal{E}_\lambda$ l'espace des fonctions $f(q)$ à valeurs réelles, définies, continues et bornées dans E, cet espace étant considéré comme espace métrique (et par conséquent uniforme) avec la définition habituelle de la distance : $\delta(f, g)$ est la borne supérieure de $|f(q) - g(q)|$ dans E ; le produit $\mathcal{E} = \prod_\lambda \mathcal{E}_\lambda$ sera un espace uniforme. A tout point p de E correspond alors un point de $\mathcal{E}$ bien déterminé, à savoir celui dont la projection sur $\mathcal{E}_\lambda$ est $\varphi_p^{(\lambda)}(q)$ quel que soit λ. Cette correspondance est biunivoque, car si $r \neq p$ il y a un voisinage $V(p)$ de p tel que $r \notin V(p)$, donc un indice λ et un entier m tels que $F_{\Sigma_\lambda}(p, r) \geqslant 2^{-m}$, donc $\varphi_p^{(\lambda)}(r) > 0$, et par suite, puisque $\varphi_r^{(\lambda)}(r) = 0$, $\varphi_p^{(\lambda)} \neq \varphi_r^{(\lambda)}$. Et la correspondance est uniformément continue dans les deux sens (et par conséquent conserve la structure uniforme) : car si V est un entourage de Δ dans E^2, l'un des termes V_m de l'une des suites Σ_λ sera contenu dans V, et alors l'inégalité $|\varphi_p^{(\lambda)} - \varphi_r^{(\lambda)}| < 2^{-m-1}$ entraîne

$$| F_{\Sigma_\lambda}(p, q) - F_{\Sigma_\lambda}(r, q) | < 2^{-m-1}$$

quel que soit q, donc, pour $q = r$, $F_{\Sigma_\lambda}(p, r) < 2^{-m-1}$, d'où $(p, r) \in V_m \subset V$; inversement, si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des indices λ en nombre fini, et si V est un entourage de Δ dans E^2 qui soit contenu dans le $(m + 1)^{\text{ième}}$ terme de chacune des suites Σ_{λ_i}, on aura, si $(p, r) \in V$, $|\varphi_p^{(\lambda_i)} - \varphi_r^{(\lambda_i)}| < 2^{-m}$ pour $i = 1, 2 \ldots, n$. En particulier, si la famille de suites Σ_λ comprend *une seule suite* Σ, E est isomorphe à un espace métrique ; mais on pourra évidemment trouver une telle suite Σ d'entourages V_ν de Δ chaque fois que la structure uniforme de E peut être définie au moyen

d'une famille *dénombrable* d'entourages de Δ dans E^2 ; comme il en est ainsi, en particulier, pour tout espace métrique, nous avons le résultat suivant :

Pour qu'un espace uniforme E, *défini par une famille d'entourages* V_α *de* Δ *dans* E^2, *soit isomorphe (au sens de la structure uniforme) à un espace métrique, il faut et il suffit que la famille* V_α *soit dénombrable ou équivalente à une famille dénombrable.*

Le théorème I admet une sorte de réciproque, en ce sens que tout espace topologique complètement régulier E est susceptible de recevoir une structure uniforme : c'est ce qu'on a vu au § 1, une structure uniforme de E étant définie si l'on plonge E dans un tore T_l à un nombre convenable de dimensions. Mais on peut procéder autrement : nous allons montrer, en effet, que *tout espace topologique complètement régulier* E *possède une structure uniforme et une seule telle que toute fonction continue sur* E, *prenant ses valeurs dans un espace uniforme* U, *soit uniformément continue.* Puisque U, d'après ce qui précède, peut être considéré comme un sous-ensemble d'un produit d'espaces métriques, la condition imposée à la structure de E sera satisfaite si elle l'est pour toute fonction $f(p)$ prenant ses valeurs dans un espace métrique ; $f(p)$ étant une telle fonction, et δ la distance dans l'espace où elle prend ses valeurs, posons

$$\delta[f(p), f(q)] = F(p, q), \qquad \text{d'où} \qquad F(p, q) \leqslant F(p, r) + F(q, r) ;$$

$f(p)$ sera uniformément continue si, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver α tel que $(p, q) \in V_\alpha$ entraîne $F(p, q) < \varepsilon$. Définissons alors sur E la structure uniforme suivante : considérons sur E^2 *toutes* les fonctions continues $F(p, q) \geqslant 0$, satisfaisant aux conditions $F(p, p) = 0$, $F(p, q) = F(q, p)$, $F(p, q) \leqslant F(p, r) + F(q, r)$, c'est-à-dire en somme aux axiomes de la distance (à l'exception de l'axiome $F(p, q) \neq 0$ si $p \neq q$) ; alors on prendra pour ensemble V_α, dans E^2, tout ensemble qu'on puisse définir au moyen d'un nombre fini de fonctions $F_i(p, q)$ et de nombres $\alpha_i > 0$ comme ensemble des points (p, q) satisfaisant aux inégalités $F_i(p, q) < \alpha_i$. Les V_α satisfont aux axiomes (U′) : le seul point qu'il convienne de vérifier est que $\bigcap_\alpha V_\alpha = \Delta$; or, si $p \neq q$, il y aura (E étant complètement régulier) une fonction continue égale à 0 en p, à 1 en q ; alors, en posant $F(p, q) = |f(p) - f(q)|$, le point (p, q) ne sera pas dans l'ensemble V_α défini par $F(p, q) < 1$. De plus, d'après ce qui précède

toute fonction continue sur E est bien uniformément continue pour la structure ainsi définie. Enfin, s'il y avait deux telles structures, la transformation identique de E en lui-même serait uniformément continue par rapport à toutes les deux, et celles-ci seraient bien identiques.

Les résultats qui précèdent permettent, si l'on veut, de déduire de la théorie des espaces métriques celle des espaces uniformes. Mais il paraît plus intéressant d'exposer celle-ci directement, et de retrouver ainsi, comme cas particulier, la théorie des espaces métriques ; c'est ce que nous allons faire à présent, en définissant d'abord la notion d'espace uniforme *complet*.

On dira qu'une famille d'ensembles C, dans un espace uniforme, est une *famille de Cauchy* si 1° l'intersection d'ensembles $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de la famille, en nombre fini, n'est jamais vide, et si 2° à tout α correspond au moins un ensemble C de la famille tel que l'on ait $(p, q) \in V_\alpha$ quels que soient p et q dans C [1].

En désignant par $A \times B$ le sous-ensemble de E^2 formé de tous les points (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$, la deuxième condition s'écrit $C \times C \subset V_\alpha$; on peut l'exprimer aussi en disant que $C \subset V_\alpha(p)$ quel que soit p dans C ; il en résulte, puisque tout ensemble C_1 de la famille a au moins un point p commun avec C, que $C \subset V_\alpha(C_1)$ quel que soit C_1 dans la famille.

On dira que deux familles de Cauchy C, D sont *équivalentes* si les réunions $C \cup D$ d'un ensemble C et d'un ensemble D forment une famille de Cauchy ; cette relation est évidemment symétrique. La famille $C \cup D$ satisfaisant toujours à la première condition ci-dessus, ce sera une famille de Cauchy si la seconde est remplie, c'est-à-dire si l'on peut, à tout α, faire correspondre C, D de façon que $C \cup D \subset V_\alpha(p)$ quel que soit p dans $C \cup D$; mais, comme tout ensemble D_1 de la seconde famille a au moins un point p commun avec D, on aura alors $C \subset V_\alpha(D_1)$. Réciproquement, supposons qu'on puisse, quels que soient D et α, trouver C tel que $C \subset V_\alpha(D)$: alors les deux familles sont équivalentes ; car, α étant donné, il y a β tel que $V_\beta V_\beta \overset{-1}{V}_\beta \subset V_\alpha$; soient alors D tel que $D \times D \subset V_\beta$, et C tel que $C \subset V_\beta(D)$, donc aussi $C \cup D \subset V_\beta(D)$, et

$$(C \cup D) \times (C \cup D) \subset V_\beta(D) \times V_\beta(D) :$$

(1) La première condition exprime que la famille C est une *base de filtre* au sens de H. CARTAN (*loc. cit.*, p. 4, note (1)).

mais ce dernier ensemble est contenu, comme on le vérifie aussitôt, dans $V_\beta V_\beta \overset{-1}{V}_\beta \subset V_\alpha$, ce qui démontre la proposition : *pour que les familles* C, D *soient équivalentes, il faut et il suffit qu'on puisse, quels que soient* D *et* α, *choisir* C *tel que* $C \subset V_\alpha(D)$. Il en résulte en particulier que la relation d'équivalence est transitive : car si les familles C et C′ d'une part, C′ et C″ de l'autre, sont équivalentes, on pourra, quels que soient C″ et α, choisir β tel que $V_\beta V_\beta \subset V_\alpha$, puis C′ tel que $C' \subset V_\beta(C'')$ et C tel que $C \subset V_\beta(C')$, d'où $C \subset V_\alpha(C'')$. On voit aussi que si les C forment une famille de Cauchy, les ensembles $V_\alpha(C)$ d'une part, les ensembles $\overline{C}$ de l'autre, forment des familles de Cauchy équivalentes à C. Voici encore une autre forme de la condition d'équivalence : *pour que les familles de Cauchy* C, D *soient équivalentes, il faut et il suffit qu'on puisse faire correspondre, à tout* α, *un ensemble* C *et un ensemble* D *tels que* $C \times D \subset V_\alpha$; c'est suffisant, car on aura alors $D \subset V_\alpha(p)$ quel que soit p dans C, donc, puisque tout ensemble C_1 de la première famille a au moins un point p commun avec C, $D \subset V_\alpha(C_1)$ quel que soit C_1 ; réciproquement, les deux familles étant équivalentes, soient α quelconque, β tel que $V_\beta V_\beta \subset V_\alpha$, C tel que $C \times C \subset V_\beta$, et D tel que $D \subset V_\beta(C)$: quel que soit p dans C on aura $C \subset V_\beta(p)$, d'où $D \subset V_\beta V_\beta(p) \subset V_\alpha(p)$, donc $C \times D \subset V_\alpha$.

Une famille réduite à un seul point p est évidemment une famille de Cauchy ; pour qu'une famille C soit équivalente à la famille réduite au point p, il faut et il suffit qu'à tout α on puisse faire correspondre un C tel que $C \subset V_\alpha(p)$; ou bien encore, que l'on ait $p \in V_\alpha(C)$ quels que soient C et α. Mais $\overline{C} = \bigcap_\alpha V_\alpha(C)$; donc, *pour que la famille* C *soit équivalente au point* p, *il faut et il suffit que* p *appartienne à tous les* $\overline{C}$; on dira alors que la famille est *convergente*. Comme deux points distincts ne peuvent évidemment constituer deux familles équivalentes, une famille convergente C est équivalente à un point p et un seul. Observons que si les ensembles C d'une famille de Cauchy sont contenus dans un même ensemble compact, la famille est sûrement convergente : car alors l'intersection des $\overline{C}$ ne peut être vide.

Nous dirons alors qu'un espace uniforme est *complet* si toute famille de Cauchy y est convergente. Il résulte des remarques ci-dessus qu'un espace uniforme est certainement complet s'il est

compact, ou bien s'il y a un α tel que $V_\alpha(p)$ soit compact quel que soit p.

Soient E un espace uniforme, A un sous-ensemble de E auquel nous attribuons la structure uniforme induite par celle de E. Une famille C de sous-ensembles de A sera une famille de Cauchy au sens de la structure de A si c'en est une au sens de E, et réciproquement ; deux familles de Cauchy dans A seront équivalentes dans A si elles le sont dans E, et réciproquement. En particulier, pour qu'une famille de Cauchy C dans A, équivalente dans E à un point p, soit convergente dans A, il faut et il suffit que p appartienne à A ; mais p appartient à tous les $\overline{C}$, donc en tout cas à $\overline{A}$; de sorte que si E est complet, et A fermé, A est complet. Réciproquement, soit p un point de $\overline{A}$: les ensembles $A \cap V_\alpha(p)$ forment une famille de Cauchy dans A, équivalente à p dans E, qui ne peut être convergente dans A que si p appartient à A. Par suite, *pour qu'un sous-ensemble* A *d'un espace uniforme* E *soit complet, il faut qu'il soit fermé ; et c'est suffisant si* E *est complet.* On voit en même temps que si E est complet, il y a correspondance biunivoque entre les points de $\overline{A}$ et les classes de familles de Cauchy équivalentes dans A.

On voit apparaître ainsi la possibilité de *compléter* un espace uniforme A, s'il n'est déjà complet ; cette possibilité trouve son expression dans le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *A tout espace uniforme* A, *on peut associer, d'une manière et essentiellement d'une seule, un espace complet* $\overline{A}$ *tel que* A *soit isomorphe à un sous-ensemble partout dense de* $\overline{A}$.

Nous savons déjà, en effet, que si un tel espace $\overline{A}$ existe, ses points seront en correspondance biunivoque avec les classes de familles de Cauchy équivalentes dans A ; désignons donc par $\overline{A}$ l'ensemble de ces classes, de sorte qu'à chacune d'elles corresponde un élément p de $\overline{A}$; en particulier, à la classe des familles équivalentes à un point a de A correspondra un élément de $\overline{A}$ qui sera encore noté a. Soient p, q deux éléments de $\overline{A}$, définis par deux familles de Cauchy C, D dans A ; nous écrirons $q \in W_\alpha(p)$ si l'on peut trouver un ensemble C, un ensemble D, et deux indices λ, μ tels que l'on ait, dans A^2, $V_\lambda(C) \times V_\mu(D) \subset V_\alpha$: cette propriété est bien indépendante des familles C, D qui

définissent p, q, car si on remplace celles-ci par deux familles équivalentes C', D', la famille $V_\rho(C')$ sera équivalente à C', donc à C, et l'on pourra trouver un C' et un ρ tels que $V_\rho(C') \subset V_\lambda(C)$, et de même un D' et un σ tels que $V_\sigma(D') \subset V_\mu(D)$, d'où $V_\rho(C') \times V_\sigma(D') \subset V_\alpha$. Les $W_\alpha(p)$ forment dans $\overline{A}$ un système de voisinages qui satisfait à (U_I), en vertu des conditions d'équivalence données plus haut pour les familles de Cauchy, et évidemment aussi à (U_{II}). Quant à (U_{III}), soient α quelconque, et β tel que $V_\beta \overset{-1}{V}_\beta \subset V_\alpha$; soient p, q, r dans $\overline{A}$, définis par les familles de Cauchy C, D, F, et tels que $p \in W_\beta(r)$, $q \in W_\beta(r)$; il y a donc $\lambda, \mu, \rho, \sigma$ tels que $V_\rho(F) \times V_\lambda(C) \subset V_\beta$, $V_\sigma(F) \times V_\mu(D) \subset V_\beta$; par suite, quels que soient a dans $V_\lambda(C)$, b dans $V_\mu(D)$, c dans F, on aura $(c, a) \in V_\beta$ ou $a \in V_\beta(c)$, et $(c, b) \in V_\beta$ ou $b \in V_\beta(c)$, donc $b \in V_\alpha(a)$ ou $(a, b) \in V_\alpha$, et par conséquent $V_\lambda(C) \times V_\mu(D) \subset V_\alpha$, ou $q \in W_\alpha(p)$. Les W_α définissent donc bien une structure uniforme dans $\overline{A}$. De plus, si a, b sont dans A et que $b \in W_\alpha(a)$, on a évidemment, *a fortiori*, $b \in V_\alpha(a)$, c'est-à-dire que $A \cap W_\alpha(a) \subset V_\alpha(a)$; réciproquement, α étant donné, soit β tel que $V_\beta V_\beta \overset{-1}{V}_\beta \subset V_\alpha$: alors, si $b \in V_\beta(a)$ et si $x \in V_\beta(a)$, $y \in V_\beta(b)$, on aura $(x, y) \in V_\beta V_\beta \overset{-1}{V}_\beta \subset V_\alpha$, donc

$$V_\beta(a) \times V_\beta(b) \subset V_\alpha,$$

et par conséquent $b \in V_\beta(a)$ entraîne $b \in W_\alpha(a)$. La structure uniforme, induite sur A par celle de $\overline{A}$, est donc celle même qu'on s'était initialement donnée dans A au moyen des V_α. A est partout dense dans $\overline{A}$, car donnons-nous un indice α et un point p de $\overline{A}$, défini par une famille C ; soient C et λ tels que $V_\lambda(C) \times V_\lambda(C) \subset V_\alpha$: on aura donc, quel que soit a dans C, $V_\lambda(C) \times V_\lambda(a) \subset V_\alpha$, donc $a \in W_\alpha(p)$, et par suite aussi $C \subset W_\alpha(p)$: on voit en même temps que la famille C est équivalente à p dans $\overline{A}$. Enfin $\overline{A}$ est complet ; car soit L une famille de Cauchy dans $\overline{A}$: il suffit, d'après ce qui précède, de montrer qu'elle est équivalente à une famille de Cauchy C dans A ; or, soit $C = A \cap W_\alpha(L)$; des ensembles

$$C_i = A \cap W_{\alpha_i}(L_i),$$

en nombre fini, ont au moins un point commun, car soient p un point commun aux L_i, α tel que $W_\alpha \subset \bigcap_i W_{\alpha_i}$, et a un point de

$A \cap W_\alpha(p)$: a appartiendra à tous les C_i ; il est immédiat, dans ces conditions, que les C forment une famille de Cauchy, équivalente à la famille $W_\alpha(L)$, donc à L.

L'existence de l'espace $\overline{A}$, jouissant des propriétés énoncées dans le théorème II, est ainsi démontrée. Son unicité va apparaître un peu plus loin comme un corollaire du théorème III.

L'importance de l'opération qui consiste à compléter un espace uniforme tient en grande partie à la possibilité de prolonger continûment, à l'espace complet, certaines fonctions continues données sur l'espace initial : par exemple, on engendre, au début de l'analyse, l'ensemble des nombres réels comme espace complet sur le corps des rationnels, et on le définit comme corps en y prolongeant les fonctions somme et produit. Soient en général E un espace uniforme, A un sous-ensemble de E, $f(a)$ une fonction continue, définie sur A, et prenant ses valeurs dans un espace uniforme U que nous pouvons supposer complet (sinon on le remplacerait par l'espace complet $\overline{U}$) ; on dira qu'on peut *prolonger continûment* la fonction f à $\overline{A}$ s'il existe une fonction $\overline{f}(p)$ continue sur $\overline{A}$, prenant ses valeurs dans U, et se réduisant à f sur A. *Pour que f puisse être continûment prolongée à $\overline{A}$, il faut et il suffit que l'image dans* U, *par f, de toute famille de Cauchy dans* A, *convergente dans $\overline{A}$, soit une famille de Cauchy dans* U. C'est nécessaire : car soit C une famille de Cauchy dans A, équivalente à un point p de $\overline{A}$, et soit $u = \overline{f}(p)$; soient $\Omega_\varepsilon(u)$ les voisinages qui définissent la structure uniforme de U ; quel que soit ε, il y aura, puisque $\overline{f}$ est continue en p, un α tel que si $a \in V_\alpha(p)$, $f(a) \in \Omega_\varepsilon(u)$; il y a un C tel que $C \subset V_\alpha(p)$, on a donc $f(C) \subset \Omega_\varepsilon(u)$; comme de plus des ensembles $f(C_i)$ en nombre fini ont évidemment toujours un point commun, on voit que les ensembles $f(C)$ forment une famille de Cauchy équivalente à $u = \overline{f}(p)$, ce qui montre de plus que $\overline{f}(p)$ est entièrement déterminé par les valeurs de f sur A, c'est-à-dire que *le prolongement est unique* s'il existe. Réciproquement, supposons la condition satisfaite, et soit p un point de $\overline{A}$: les $C_\alpha = A \cap V_\alpha(p)$ forment une famille de Cauchy dans A, équivalente à p dans $\overline{A}$, donc les $f(C_\alpha)$ forment une famille de Cauchy dans U, équivalente (puisque U est complet) à un point u de U ; si C' est une autre famille équivalente à p, les $C_\alpha \cup C'$ formeront

encore une famille de Cauchy, donc aussi les $f(C_\alpha \cup C') = f(C_\alpha) \cup f(C')$, et par suite les $f(C')$ forment une famille équivalente à $f(C_\alpha)$, donc à u : à tout p de $\overline{A}$ correspond donc ainsi un point u bien déterminé dans U, et l'on peut poser $u = \overline{f}(p)$; si p est dans A, on peut prendre la famille C' réduite à p, et l'on voit qu'alors $\overline{f} = f$. Donnons-nous maintenant l'indice ε, et soit η tel que $\Omega_\eta\Omega_\eta \subset \Omega_\varepsilon$; soient p, q deux points de $\overline{A}$, $u = \overline{f}(p)$, $v = \overline{f}(q)$, $C_\alpha = A \cap V_\alpha(p)$, $D_\beta = A \cap V_\beta(q)$: puisque $f(C_\alpha)$ est équivalente à u, on peut choisir α de façon que $f(C_\alpha) \subset \Omega_\eta(u)$, puis β de façon que $V_\beta V_\beta \subset V_\alpha$; alors, si $q \in V_\beta(p)$, on a $V_\beta(q) \subset V_\alpha(p)$, $D_\beta \subset C_\alpha$, et $f(D_\beta) \subset \Omega_\eta(u)$: mais, la famille $f(D_\beta)$ étant équivalente à v, on a $v \in \overline{f(D_\beta)} \in \Omega_\eta[f(D_\beta)]$ quel que soit β, donc $v \in \Omega_\eta\Omega_\eta(u) \subset \Omega_\varepsilon(u)$: autrement dit, $q \in V_\beta(p)$ entraîne $v \in \Omega_\varepsilon(u)$, et $\overline{f}$ est bien continue.

Le cas le plus intéressant est celui où f est uniformément continue : alors la condition ci-dessus est évidemment satisfaite. De plus, le prolongement $\overline{f}$ de f est alors uniformément continu sur $\overline{A}$. Pour le voir, montrons que si $E = \overline{A}$, et si une fonction f, donnée sur E, est uniformément continue sur A, elle l'est aussi sur E. Convenons, Ω étant un sous-ensemble quelconque de U^2, de désigner par $\overset{-1}{f}(\Omega)$ l'ensemble des points (p, q) de E^2 tels que $(f(p), f(q)) \in \Omega$; f sera uniformément continue sur E si, à tout ε, on peut faire correspondre α tel que $\overset{-1}{f}(\Omega_\varepsilon) \supset V_\alpha$; d'ailleurs, f étant uniformément continue sur A, on peut, quel que soit ε, choisir α de façon que $V_\alpha \cap (A \times A) \subset \overset{-1}{f}(\Omega_\varepsilon)$. Supposons, comme nous avons le droit de le faire, que les Ω_ε soient fermés dans U^2, et les V_α ouverts dans E^2 ; A étant partout dense dans E, $A \times A$ le sera dans E^2, donc $V'_\alpha = V_\alpha \cap (A \times A)$ le sera dans V_α, et l'on aura $\overline{V}'_\alpha = \overline{V}_\alpha$; Ω_ε étant fermé dans U^2, et f continue, $\overset{-1}{f}(\Omega_\varepsilon)$ sera fermé dans E^2, donc $\overline{V}'_\alpha \subset \overset{-1}{f}(\Omega_\varepsilon)$, et par conséquent $V_\alpha \subset \overset{-1}{f}(\Omega_\varepsilon)$, ce qu'il fallait démontrer. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Soient* E *un espace uniforme*, A *un sous-ensemble de* E, $f(a)$ *une fonction, prenant ses valeurs dans un espace uniforme complet* U, *définie et uniformément continue sur* A ; *alors il existe une fonction* $\overline{f}(p)$ *et une seule, définie et continue sur*

$\overline{\mathrm{A}}$, *prenant ses valeurs dans* U, *et se réduisant sur* A *à la fonction* f ; *et* $\overline{f}$ *est uniformément continue sur* $\overline{\mathrm{A}}$.

Nous pouvons maintenant compléter la démonstration du théorème II ; soient pour cela E, E′ deux espaces uniformes complets, et A, A′ des sous-ensembles de E, E′ respectivement, tels que $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{E}$, $\overline{\mathrm{A}'} = \mathrm{E}'$: nous allons montrer que si les espaces uniformes A, A′ sont isomorphes, il en est de même de E, E′. Une isomorphie entre A et A′ n'est pas autre chose, en effet, qu'une correspondance biunivoque, uniformément continue dans les deux sens, entre A et A′ : il existera donc deux fonctions $a' = f(a)$, $a = g(a')$, inverses l'une de l'autre, uniformément continues, qui représentent, l'une A sur A′, l'autre A′ sur A ; d'après le théorème III, on pourra, d'une manière et d'une seule, déterminer deux fonctions $p' = \overline{f}(p)$, $p = \overline{g}(p')$, qui prolongent respectivement f et g ; la fonction $\overline{g}[\overline{f}(p)]$ est alors une transformation de E en lui-même qui coïncide avec la transformation identique sur A, donc, d'après le théorème III, sur tout l'espace E ; de même $\overline{f}[\overline{g}(p')]$ est la transformation identique de E′ en lui-même, et par conséquent les fonctions $\overline{f}(p)$, $\overline{g}(p')$ sont inverses l'une de l'autre et déterminent une correspondance biunivoque entre E et E′ ; comme elles sont uniformément continues, cette correspondance est une isomorphie : ce qui montre bien que l'espace complet $\overline{\mathrm{A}}$ sur un espace uniforme A donné est entièrement déterminé à une isomorphie près.

3. Structure uniforme des espaces compacts. — Le théorème I fait déjà apparaître une relation entre les espaces uniformes et les espaces compacts. Tychonoff (*loc. cit.*) a montré, en effet, que la condition nécessaire et suffisante, pour qu'un espace *topologique* soit complètement régulier, est qu'il soit homéomorphe à un sous-ensemble d'un espace compact, ou encore à un sous-ensemble d'un tore T_l à un nombre convenable de dimensions ; c'est donc là en même temps une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace topologique puisse recevoir une structure uniforme, puisqu'on a vu au § 1 qu'on peut attribuer une telle structure à tout T et à tout sous-ensemble d'un T_l. En particulier, tout espace topologique compact est susceptible d'une structure uniforme ; mais de plus, fait très important, *cette structure est*

unique, c'est-à-dire qu'elle est entièrement déterminée par la structure topologique du même espace, comme le montre le théorème que voici :

THÉORÈME IV. — *Soient* E *un espace uniforme compact,* V_α *la famille de sous-ensembles de* E^2 *qui définit la structure uniforme de* E ; *alors la famille* V_α *est équivalente à la famille de tous les sous-ensembles ouverts de* E^2 *qui contiennent* Δ.

Il suffit de démontrer que tout ensemble ouvert $\Omega \supset \Delta$ contient un V_α. Supposons, comme nous avons le droit de le faire, que les V_α soient fermés, et considérons la famille des ensembles fermés $F_\alpha = V_\alpha \cap \complement(\Omega)$; leur intersection est vide, car l'intersection des V_α est Δ qui est $\subset \Omega$. E^2 étant compact, il y a donc des ensembles F_{α_i} en nombre fini dont l'intersection est vide ; si alors on prend α tel que $V_\alpha \subset \bigcap_i V_{\alpha_i}$, on aura $V_\alpha \cap \complement(\Omega) = 0$, ou $V_\alpha \subset \Omega$.

De là résulte aussitôt le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Toute fonction* $f(p)$, *définie et continue sur un espace compact* E, *prenant ses valeurs dans un espace uniforme quelconque* U, *est uniformément continue.*

Supposons en effet que la structure uniforme de U soit définie par une famille d'ensembles *ouverts* Ω_ε : alors $\overset{-1}{f}(\Omega_\varepsilon)$ sera un ensemble ouvert dans E^2, et il n'y a qu'à appliquer le théorème IV. On voit en même temps que si A est un sous-ensemble de E, pour qu'une fonction continue, définie sur A et prenant ses valeurs dans un espace complet U, puisse être continûment prolongée à $\overline{A}$, il est non seulement suffisant (d'après le théorème III) mais aussi nécessaire qu'elle soit uniformément continue sur A.

Voici encore un résultat étroitement apparenté au théorème IV, et qui est bien connu dans la théorie des espaces métriques :

THÉORÈME VI. — *Soient* E *un espace uniforme compact,* V_α *la famille qui définit la structure uniforme de* E, $\mathcal{O}$ *une famille de sous-ensembles ouverts de* E *dont la réunion soit* E. *Alors il y a* α *tel que* $V_\alpha(p)$ *soit contenu dans un ensemble de* $\mathcal{O}$ *quel que soit* p.

Il suffirait, pour le voir, de montrer qu'il y a Ω ouvert dans E^2, tel que $\Omega(p)$ soit contenu dans un ensemble de $\mathcal{O}$ quel que soit p.

Mais il est plus commode de procéder directement : à tout point p de E on peut faire correspondre un indice α tel que $V_\alpha(p)$ soit contenu dans un ensemble de $\mathcal{O}$, donc un indice β tel que $V_\beta V_\beta(p)$ soit contenu dans ce même ensemble. E étant compact, on pourra donc déterminer des points p_i en nombre fini, tels que les $V_{\beta_i}(p_i)$ correspondants aient E pour réunion ; soit alors γ tel que $V_\gamma \subset \bigcap_i V_{\beta_i}$: quel que soit q dans E, il y aura un i tel que $q \in V_{\beta_i}(p_i)$, d'où $V_\gamma(q) \subset V_{\beta_i} V_{\beta_i}(p_i)$, et $V_\gamma(q)$ sera contenu dans un ensemble de $\mathcal{O}$, ce qui démontre le théorème.

Si l'espace uniforme E, défini par une famille V_α de sous-ensembles de E^2, est compact, on peut, quel que soit α, trouver des points p_i en nombre fini, tels que les $V_\alpha(p_i)$ aient E pour réunion. Mais il y a plus ; on a en effet le théorème suivant :

Théorème VII. — *Soient* A *un espace uniforme* ; V^α *la famille de sous-ensembles de* A^2 *qui définit la structure de* A ; $\overline{A}$ *l'espace complet qu'on déduit de* A *en le complétant. Pour que* $\overline{A}$ *soit compact, il faut et il suffit que l'on puisse, à tout indice* α, *faire correspondre des points* a_i *de* A *en nombre fini de façon que* A *soit la réunion des* $V_\alpha(a_i)$.

C'est nécessaire : car soit β tel que $V_\beta \overset{-1}{V}_\beta \subset V_\alpha$; il y aura des points p_i de $\overline{A}$, en nombre fini, tels que $\overline{A} = \bigcup_i V_\beta(p_i)$, d'où, si l'on prend a_i dans $A \cap V_\beta(p_i)$, $\overline{A} = \bigcup_i V_\beta \overset{-1}{V}_\beta(a_i) = \bigcup_i V_\alpha(a_i)$.

Pour démontrer la réciproque, considérons à nouveau la fonction de Pontrjagin, ou plutôt la fonction $F_\Sigma(p,q)$ qui a été définie et dont les propriétés ont été décrites à la fin de la démonstration du théorème I. Donnons-nous cette fois une famille de suites Σ'_λ d'entourages de Δ dans A^2, telle qu'à tout entourage V de Δ dans A^2 corresponde au moins une suite Σ'_λ dont *le premier terme* soit contenu dans V ; posons, quels que soient la suite Σ'_λ et les points a, b dans A, $x_{b,\lambda}(a) = F_{\Sigma'_\lambda}(a, b)$; soit l la puissance de l'ensemble des indices (b, λ) : considérons l'espace I_l qui est le produit direct de l intervalles $0 \leqslant x \leqslant 1$, et qui est compact comme produit

d'espaces compacts ; et faisons correspondre, à tout point a de A, le point $X(a)$ de coordonnées $x_{b,\lambda}(a)$ dans I_l : le théorème sera démontré si nous faisons voir que la correspondance entre A et son image $X(A)$ par la fonction $X(a)$ dans I_l est une isomorphie (au sens de la structure uniforme) : car alors, I_l étant un espace uniforme compact, donc complet, la fermeture $\overline{X(A)}$ de $X(A)$ dans I_l sera isomorphe à $\overline{A}$, et elle est bien compacte. Mais la fonction de Pontrjagin étant uniformément continue, il en est de même de la fonction $X(a)$: reste à montrer qu'elle définit une correspondance biunivoque entre A et $X(A)$, et que la fonction inverse est aussi uniformément continue.

Le premier point, en réalité, a déjà été traité plus haut, mais reprenons la démonstration. Soient a, a' deux points distincts de A ; d'après les hypothèses faites, il y aura une suite Σ'_λ dont le premier terme V_0 soit tel que $a' \notin V_0V_0(a)$; l'on aura alors $x_{a,\lambda}(a) = 0$, $x_{a,\lambda}(a') = 1$, donc $X(a') \neq X(a)$.

Quant au second point, soit V un entourage de Δ dans A^2 ; il y aura une suite Σ'_λ dont le premier terme soit contenu dans V ; soient $V_0, V_1, V_2, \ldots$ les termes de cette suite. D'après les propriétés de la fonction F_Σ, on aura $x_{b,\lambda}(a) < 1/8$ si $a \in V_4(b)$, et réciproquement on aura $a \in V_1(b)$ si $x_{b,\lambda}(a) < 1/4$. Choisissons maintenant des points b_i, en nombre fini, tels que $A = \bigcup_i V_4(b_i)$; posons $x_i(a) = x_{b_i,\lambda}(a)$; je dis que si l'on a $|x_i(a') - x_i(a)| < 1/8$ quel que soit i, on aura $a' \in V(a)$. En effet, il y aura une valeur au moins de l'indice i telle que $a \in V_4(b_i)$, d'où $x_i(a) < 1/8$, donc $x_i(a') < 1/4$, et par suite $a' \in V_1(b_i) \subset V_1\overset{-1}{V_4}(a) \subset V_0(a) \subset V(a)$. D'après la définition de la structure uniforme de I_l, cela signifie précisément que a est une fonction uniformément continue de $X(a)$, et le théorème est démontré.

Tout espace compact étant complet, on peut également énoncer le théorème VII sous la forme suivante :

Pour qu'un espace uniforme E *soit compact, il faut et il suffit qu'il soit complet, et qu'on puisse, quel que soit* α, *trouver des points* p_i *de* E *en nombre fini, tels que* $E = \bigcup_i V_\alpha(p_i)$.

On se sert parfois, plus commodément que du théorème VII, du critère que voici :

THÉORÈME VIII. — *Si, dans l'espace uniforme* A, *toute suite possède un point d'accumulation l'espace complet* $\overline{A}$ *qu'on en déduit est compact.*

Sinon en effet, d'après VII, il y aurait α tel que A ne pût être recouvert par des $V_\alpha(p_i)$ en nombre fini ; on pourrait donc choisir successivement des points p_1, p_2, p_3,... tels que $p_n \notin V_\alpha(p_i)$ pour $i = 1,2,\ldots, n-1$; et la suite p_i aurait un point d'accumulation p. Soit β tel que $V_\beta \overset{-1}{V}_\beta \subset V_\alpha$: il devra y avoir une infinité de points p_i dans $V_\beta(p)$, donc deux points p_i, p_j tels que $i < j$, $p_i \in V_\beta(p)$, $p_j \in V_\beta(p)$, d'où $p_j \in V_\alpha(p_i)$, contrairement à la définition des p_i.

4. Espaces uniformes localement compacts. — Pour exprimer qu'un espace uniforme complet est localement compact, il suffit d'écrire que chaque point possède un voisinage satisfaisant à la condition du théorème VII. Parmi les espaces de cette nature, il y a une catégorie particulièrement intéressante : je veux parler des espaces uniformes complets E tels qu'il existe une valeur de l'indice α pour laquelle *tous* les $V_\alpha(p)$ soient compacts ; ces espaces devraient être dits *uniformément localement compacts* si cette manière de parler n'offensait l'euphonie et même la grammaire. Ce sont leurs propriétés que nous allons examiner maintenant.

Introduisons d'abord une nouvelle notation. E étant un ensemble quelconque, W un sous-ensemble de E^2, nous poserons

$$\overset{1}{W} = W, \quad \overset{2}{W} = W \cdot W,$$

et, quel que soit l'entier naturel n, $\overset{n}{W} = \overset{n-1}{W} \cdot W$; et nous désignerons par $\overset{\infty}{W}$ la réunion de tous les $\overset{n}{W}$ pour $n = 1,2,3,\ldots$ Considérons en particulier un entourage V_α de Δ dans E^2, E étant un espace uniforme ; on aura $\overset{\infty}{V}_\alpha \supset V_\alpha \cdot \overset{\infty}{V}_\alpha \cdot V_\alpha$ quel que soit n, donc

$$\overset{\infty}{V}_\alpha = V_\alpha \cdot \overset{\infty}{V}_\alpha \cdot V_\alpha ;$$

$\overset{\infty}{V}_\alpha$ contient donc un voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire que c'est un ensemble ouvert ; d'autre part, la fermeture de $\overset{\infty}{V}_\alpha$

étant contenue dans $V_\alpha \cdot \overset{\infty}{V}_\alpha \cdot V_\alpha$, $\overset{\infty}{V}_\alpha$ est un ensemble fermé. $\overset{\infty}{V}_\alpha$ est donc une somme de composantes connexes de E^2, et $\overset{\infty}{V}_\alpha(p)$ est, quel que soit p, une somme de composantes connexes de E, qu'on pourra appeler la α-composante de p dans E. Si en particulier E est connexe, on aura $\overset{\infty}{V}_\alpha = E^2$ et $\overset{\infty}{V}_\alpha(p) = E$ quels que soient α et p. Ces remarques vont nous servir à démontrer le théorème suivant :

Théorème IX. — *Soit* E *un espace uniforme connexe; supposons qu'il y ait un entourage* V_α *de* Δ *dans* E^2, *tel que* $V_\alpha(p)$ *soit compact quel que soit p. Alors* E *est réunion dénombrable d'ensembles compacts.*

Soit en effet β tel que $V_\beta V_\beta \subset V_\alpha$; on aura, p étant arbitrairement choisi dans E, $E = \overset{\infty}{V}_\beta(p)$: il suffit donc de démontrer que $\overset{n}{V}_\beta(p)$ est compact, ce qui sera évident (par récurrence sur n) si nous faisons voir que $V_\beta(A)$ est compact quel que soit A compact dans E. Or, si A est compact, il y aura des points q_i, en nombre fini, tels que $A \subset \bigcup_i V_\beta(q_i)$: alors $V_\beta(A) \subset \bigcup_i V_\beta V_\beta(q_i) \subset \bigcup_i V_\alpha(q_i)$; les $V_\alpha(q_i)$ étant compacts par hypothèse, le théorème est démontré.

Mais on sait que tout espace localement compact E peut être, d'une manière et d'une seule, transformé en espace compact par l'adjonction d'un seul point, qu'on peut appeler le point à l'infini, auquel on attribue pour voisinages tous les complémentaires d'ensembles compacts dans E : si E est réunion dénombrable d'ensembles compacts, le point à l'infini possédera un système fondamental dénombrable de voisinages : nous dirons alors que E est *dénombrable à l'infini.* S'il en est ainsi, on vérifie facilement qu'on peut trouver une suite d'ensembles ouverts W_n dans E, dont la réunion soit E, tels que $\overline{W}_n \subset W_{n+1}$ et que $\overline{W}_n$ soit compact quel que soit n ; on pourra déterminer, sur l'ensemble fermé compact (donc complètement régulier) $\overline{W}_{n+1} - W_n$, une fonction continue $\varphi(p)$, comprise entre n et $n+1$, prenant la valeur n sur $\overline{W}_n - W_n$ et la valeur $n+1$ sur $\overline{W}_{n+1} - W_{n+1}$: on aura ainsi défini, sur l'espace E tout entier, une fonction $\varphi(p)$ continue, $\geqslant 0$, et tendant vers $+\infty$ si p tend vers le point à l'infini. Supposons

maintenant qu'on ait représenté E, en tant qu'espace complètement régulier, sur un sous-ensemble d'un tore T_I à un nombre convenable de dimensions, et qu'au point p de E corresponde ainsi le point $x(p)$ de T_I; alors, en appelant D la demi-droite $0 \leqslant t < +\infty$, on peut, à tout point p de E, faire correspondre le point de coordonnées $\varphi(p), x(p)$ dans le produit $D \times T_I$; la correspondance est un homéomorphisme ; et l'image de E est un sous-ensemble *fermé* de $D \times T_I$. Si donc on attribue à D, par exemple, la structure uniforme qui est déterminée par la distance $\delta(t,t') = |t' - t|$, on en déduira une structure pour $D \times T_I$, puis une structure pour E, qui satisfera aux conditions du théorème IX. Par conséquent, *pour qu'un espace topologique* E, *connexe et localement compact, puisse recevoir une structure uniforme satisfaisant aux conditions du théorème* IX, *il faut et il suffit qu'il soit dénombrable à l'infini.*

5. Application à la théorie des groupes. — On a vu, au § 1, qu'on peut attribuer à tout groupe topologique une structure uniforme. Rappelons-en la définition : les V_α étant un système fondamental de voisinages de l'élément unité e, satisfaisant aux axiomes (G), les systèmes de voisinages $V'_\alpha(x) = V_\alpha \cdot x$ satisfont aux axiomes (U), et déterminent dans G une structure uniforme que nous appellerons la structure (V') ; si l'on pose $\Phi(x,y) = yx^{-1}$, cette structure peut aussi être définie par la famille d'ensembles $V'_\alpha = \overset{-1}{\Phi}(V_\alpha)$, qui satisfait aux axiomes (U').

Il est clair que si s est un élément fixe du groupe, la fonction $f(x) = xs$ est uniformément continue pour la structure (V') ; ou, ce qui revient au même, la transformation $(x \rightarrow xs)$ transforme la structure (V') en elle-même. La fonction $g(x) = sx$ est uniformément continue aussi, s étant fixe, car si α est donné on peut trouver β tel que $y \in V_\beta x$ entraîne $sy \in V_\alpha \cdot sx$: il suffit de prendre

$$V_\beta \subset s^{-1} V_\alpha s.$$

La structure (V') est donc aussi invariante par les transformations $(x \rightarrow sx)$.

En revanche, considérons la fonction $\varphi(x) = x^{-1}$. Pour qu'elle soit uniformément continue, il faut et il suffit que l'on puisse, quel que soit α, déterminer β de façon que $y \in V_\beta x$ entraîne

$$y^{-1} \in V_\alpha x^{-1},$$

c'est-à-dire de façon que $\overset{-1}{V}_\beta \in x V_\alpha x^{-1}$ quel que soit x. Il n'en sera pas ainsi en général, comme le montre l'exemple du groupe de toutes les substitutions linéaires à n variables pour $n \geqslant 2$; en général, par conséquent, la transformation $(x \to x^{-1})$ transforme la structure uniforme (V') en une autre structure (V''), qu'il est facile de définir : on aura $V''_\alpha(x) = x V_\alpha$, et, en posant

$$\Psi(x, y) = x^{-1} y,$$

$V''_\alpha = \overset{-1}{\Psi}(V_\alpha)$. La fonction x^{-1} sera uniformément continue, et les structures (V'), (V'') seront identiques, si G est abélien, ou s'il est compact, ou plus généralement si c'est le produit direct d'un groupe abélien et d'un groupe compact ou si c'est un sous-groupe d'un tel produit ; la réciproque est vraie sous certaines conditions, mais ce n'est pas le lieu de le démontrer ici. D'ailleurs la fonction x^{-1} est uniformément continue sur G, pour la structure (V'), en même temps que la fonction $F(x,y) = xy$ l'est sur G^2 : pour que celle-ci le soit, en effet, il faut et il suffit qu'à tout α on puisse faire correspondre β, γ tels que $x' \in V_\beta x$, $y' \in V_\gamma y$ entraînent $x'y' \in V_\alpha xy$, c'est-à-dire tel que $V_\beta x V_\gamma \subset V_\alpha x$: on aura donc à plus forte raison $x V_\gamma \subset V_\alpha x$, et cela quel que soit x, donc x^{-1} est uniformément continue ; réciproquement, supposons x^{-1} uniformément continue, soient β tel que $V_\beta V_\beta \subset V_\alpha$, et γ tel que $V_\gamma \subset x^{-1} V_\beta x$ quel que soit x : on aura bien $V_\beta x V_\gamma \subset V_\beta V_\beta x \subset V_\alpha x$. On en déduit facilement que les *quatre* fonctions

$$\varphi(x) = x^{-1}, \quad F(x, y) = xy, \quad \Phi(x, y) = yx^{-1}, \quad \Psi(x, y) = x^{-1}y,$$

définies, la première sur G et les autres sur G^2, sont à la fois uniformément continues ; et, si elles le sont, les structures (V'), (V'') sont identiques. Si alors on complète le groupe G par rapport à (V'), on pourra prolonger, à l'espace complet $\overline{G}$ ainsi obtenu, les quatre fonctions en question, et par conséquent définir $\overline{G}$ comme groupe. En particulier, tout groupe abélien topologique peut être ainsi complété.

Les choses ne se passent plus de même dans le cas général : (V') et (V'') seront distinctes, et, en complétant le groupe par rapport à l'une d'elles, on n'obtiendra en général plus un groupe, puisqu'on n'est pas sûr de pouvoir prolonger la fonction x^{-1} à l'espace obtenu. On pourrait d'ailleurs dans ce cas considérer une troisième structure définie par $V'''_\alpha(x) = V_\alpha x \cap x V_\alpha$; pour celle-ci

x^{-1} serait uniformément continue, mais xy ne le serait pas, et l'on n'aurait rien gagné. Cependant, si le groupe est complet par rapport à l'une des structures (V′), (V″), il l'est aussi par rapport à l'autre, de sorte que la notion de *groupe complet* a un sens bien défini.

Voici d'autre part un cas important où on peut compléter le groupe : c'est celui où les fonctions x^{-1}, xy, yx^{-1}, $x^{-1}y$, sans être uniformément continues sur tout le groupe G, le sont du moins sur un voisinage V_0 de l'élément unité : on démontre, comme plus haut, qu'elles le sont en même temps, ou plutôt (en supposant $\overset{-1}{V}_0 = V_0$ pour simplifier l'écriture) que si la première l'est sur V_0, les trois autres le sont sur $V_0 \times V_0$, et réciproquement ; il faut et il suffit pour cela que l'on puisse, à tout α, faire correspondre β tel que $V_\beta \subset xV_\alpha x^{-1}$ quel que soit $x \in V_0$. Alors, quels que soient s, t, la fonction x^{-1} est uniformément continue sur $V_0 s$ (et aussi sur sV_0) par rapport à l'une ou l'autre des structures (V′), (V″), et xy, yx^{-1}, $x^{-1}y$ le sont sur $V_0 s \times V_0 t$; et, sur $V_0 s$ (ainsi que sur sV_0), les deux structures (V′), (V″) sont identiques : on peut dire qu'elles sont localement équivalentes sur G. Démontrons par exemple le dernier point : il suffira de faire voir que si $x \in V_0 s$, à tout α correspondra β tel que $yx^{-1} \in V_\beta$ entraîne $x^{-1}y \in V_\alpha$ et inversement ; si l'on pose $x = zs$, avec $z \in V_0$, on voit qu'on devra pouvoir faire correspondre, à tout α, un β tel que $z^{-1}V_\beta z \subset sV_\alpha s^{-1}$ quel que soit $z \in V_0$, et aussi, à tout α, un β tel que $zsV_\beta s^{-1}z^{-1} \subset V_\alpha$: ce qui est évident avec les hypothèses faites.

Dans les mêmes conditions aussi, toute famille de Cauchy pour (V′) en sera une pour (V″), et réciproquement ; car soit C une telle famille : à tout β correspondra un C tel que, si x et y sont dans C, l'on ait $yx^{-1} \in V_\beta$, ou $y \in V_\beta x$, donc $C \subset V_\beta x$; en particulier il y aura C_0 et s tels que $C_0 \subset V_0 s$; alors il y aura dans C un x, à savoir un élément quelconque de $C \cap C_0$, tel que $x \in V_0 s$ et que $C \subset V_\beta x$; soit donc $x = zs$, avec $z \in V_0$, on aura $C \subset V_\beta zs$, donc $\overset{-1}{C}C \subset s^{-1}z^{-1}\overset{-1}{V}_\beta V_\beta zs$; on voit donc qu'à tout α on peut faire correspondre un indice β et un ensemble C, de façon que $\overset{-1}{C}C \subset V_\alpha$, ou (ce qui revient au même)

$$C \times C \subset \overset{-1}{\Psi}(V_\alpha) = V''_\alpha ;$$

ce qui démontre la proposition.

On voit donc qu'on obtient le même ensemble $\overline{G}$ en complétant G, soit par rapport à (V′), soit par rapport à (V″) ; les structures (V′), (V″), étendues à $\overline{G}$, sont encore localement équivalentes ; on peut, en vertu de l'uniforme continuité locale, prolonger à $\overline{G}$ les fonctions x^{-1}, xy, yx^{-1}, $x^{-1}y$; $\overline{G}$ est donc un groupe topologique, complet par rapport aux deux structures (V′), (V″) qu'on peut y définir. Résumons les résultats obtenus :

Théorème X. — *Soit* G *un groupe topologique, tel que la fonction* x^{-1} *soit uniformément continue dans un certain voisinage* V_0 *de l'unité. Alors l'on pourra, d'une manière et (essentiellement) d'une seule, représenter* G *comme sous-groupe partout dense d'un groupe* $\overline{G}$ *complet par rapport aux deux structures* (V′), (V″) *qu'on y a définies ; tout point de* $\overline{G}$ *possède un voisinage où la fonction* x^{-1} *est uniformément continue et où les structures* (V′), (V″) *sont identiques ; et tout point de* $\overline{G}^2$ *possède un voisinage où* xy, yx^{-1}, $x^{-1}y$ *sont uniformément continues.*

Un cas particulièrement intéressant est celui où il existe dans G un voisinage de l'unité V_0 tel que l'on puisse, quel que soit α, recouvrir V_0 au moyen d'ensembles $V_\alpha x_i$ *en nombre fini* : dans ce cas, l'hypothèse du théorème X est bien satisfaite, et $\overline{G}$ *est localement compact.* En effet, soit α quelconque ; soit β tel que

$$V_\beta V_\beta \overset{-1}{V}_\beta \subset V_\alpha \,;$$

il y aura des x_i, en nombre fini, tels que $V_0 \subset \bigcup_i V_\beta x_i$, de sorte que tout $x \in V_0$ sera dans l'un des $V_\beta x_i$; l'on aura donc, quel que soit $x \in V_0$, $xV_\gamma x^{-1} \subset \bigcup_i V_\beta x_i V_\gamma x_i^{-1} V_\beta$; si donc on choisit γ_i tel que $V_{\gamma_i} \subset x_i^{-1} V_\beta x_i$, puis γ tel que $V_\gamma \subset \bigcap_i V_{\gamma_i}$, on aura $xV_\gamma x^{-1} \subset V_\beta V_\beta \overset{-1}{V}_\beta$ quel que soit $x \in V_0$, donc aussi $xV_\gamma x^{-1} \subset V_\alpha$: ce qui est bien la condition pour que x^{-1} soit uniformément continue dans V_0. Cela étant, le théorème VII, appliqué à V_0, montre que la fermeture de V_0 dans $\overline{G}$ est compacte, c'est-à-dire que $\overline{G}$ est bien localement compact.

6. Définition d'une structure uniforme par des recouvrements. — Soit de nouveau E un ensemble quelconque ; par un *recouvrement* R de E, nous entendrons une famille de sous-ensembles A_λ de E ayant E pour réunion ; le recouvrement R sera dit *fini* si les ensembles A_λ sont en nombre fini. A tout recouvrement R de E nous ferons correspondre le sous-ensemble de E^2 défini par

$$V_R = \bigcup_\lambda (A_\lambda \times A_\lambda) :$$

on a évidemment $V_R \supset \Delta$ et $\overset{-1}{V}_R = V_R$.

On dira que des recouvrements R d'un ensemble E forment une *classe régulière* si les ensembles V_R correspondants dans E^2 satisfont aux axiomes (U′), et par conséquent définissent une structure uniforme dans E, et par suite aussi une topologie dans E. Si E était déjà donné *a priori* comme espace topologique, l'on réservera le nom de classe régulière à celles pour lesquelles la topologie impliquée par la structure uniforme qu'elles définissent est la même que celle qu'on s'était donnée sur E ; il faut en particulier pour cela que $V_R(p)$ soit un voisinage de p quel que soit p : nous conviendrons donc aussi de réserver le nom de recouvrement, dans un espace topologique E, aux familles d'ensembles R ayant E pour réunion et telles de plus que $V_R(p)$ soit un voisinage de p quel que soit p. Il est clair d'ailleurs que $V_R(p)$ n'est pas autre chose que la réunion de ceux des ensembles A_λ du recouvrement R qui contiennent p ; et plus généralement $V_R(B)$ est la réunion de ceux des A_λ qui ont au moins un point commun avec B.

Un recouvrement sera dit ouvert s'il se compose d'ensembles ouverts, compact s'il se compose d'ensembles compacts, etc. Il est à peu près évident que *toute structure uniforme peut être définie au moyen d'une classe régulière de recouvrements, soit ouverts, soit fermés* : soit en effet une telle structure, définie par une famille d'ensembles V_α dans E^2 ; soit R_α le recouvrement constitué par la famille de tous les ensembles $V_\alpha(p)$, et posons $W_\alpha = V_{R_\alpha}$: on aura $W_\alpha \supset V_\alpha$, et, si $V_\beta \overset{-1}{V}_\beta \subset V_\alpha$, $W_\beta \subset V_\alpha$, ce qui montre que les R_α forment une classe régulière définissant dans E la structure même qu'on s'était donnée ; les recouvrements R_α seront ouverts ou fermés si l'on a pris les ensembles V_α ouverts ou fermés.

L'intérêt des recouvrements tient principalement au rôle qu'on

peut leur faire jouer dans la théorie des espaces compacts et localement compacts, rôle qui est mis en évidence par les théorèmes que nous allons démontrer maintenant.

THÉORÈME XI. — *Sur un espace compact* E, *la classe de tous les recouvrements ouverts finis est régulière.*

En vertu du théorème IV, il suffit de montrer que si $\Omega \supset \Delta$ est ouvert dans E^2, on peut trouver des ensembles ouverts Ω'_i en nombre fini dans E, tels que $\bigcup_i \Omega'_i = E, \bigcup_i (\Omega'_i \times \Omega'_i) \subset \Omega$. Or on peut, à tout point p de E, faire correspondre un Ω'_p ouvert dans E, contenant p et tel que $\Omega'_p \times \Omega'_p \subset \Omega$; E étant compact, on peut extraire de la famille Ω'_p des ensembles Ω'_i en nombre fini dont la réunion soit encore E, ce qui démontre le théorème.

Réciproquement d'ailleurs, il résulte du théorème VII que toute classe régulière de recouvrements *finis* d'un ensemble E détermine sur E une structure uniforme telle que l'espace complet correspondant $\overline{E}$ soit compact. On peut se demander s'il existe des espaces topologiques, autres que les espaces compacts, sur lesquels la classe de tous les recouvrements finis soit régulière : j'ai trouvé qu'il en existe effectivement, mais qu'ils ne peuvent satisfaire au IIe axiome de dénombrabilité, et qu'ils ont des caractères quelque peu pathologiques ; un exemple en est fourni par un espace, dont la définition m'a été communiquée par Pontrjagin à propos d'une question différente, et que je désignerai par P. Soient l un cardinal quelconque supérieur au dénombrable, T_l le tore à l dimensions : alors P est l'ensemble des points de T_l dont toutes les coordonnées sont nulles à l'exception au plus d'une infinité dénombrable d'entre elles.

Dans les espaces localement compacts, on est amené à considérer les recouvrements *localement finis*, c'est-à-dire tels que tout ensemble compact n'ait de point commun qu'avec un nombre fini d'ensembles du recouvrement, et en particulier les recouvrements ouverts compacts, localement finis. D'après le théorème IX, si l'espace E est connexe, une classe de tels recouvrements dans E ne peut être régulière que si E est dénombrable à l'infini. Voici une sorte de réciproque de ce résultat :

Théorème XII. — *Soit* E *un espace uniforme connexe ; supposons qu'il y ait un entourage* V_0 *de* Δ *dans* E^2, *tel que* $V_0(p)$ *soit compact quel que soit* p. *Alors la structure uniforme de* E *peut être définie au moyen d'une classe régulière de recouvrements ouverts compacts localement finis.*

L'hypothèse implique naturellement que E soit localement compact, complet, et dénombrable à l'infini ; nous pouvons supposer de plus que les V_α qui définissent la structure de E sont ouverts, que $\overset{-1}{V}_\alpha = V_\alpha$, et nous borner à considérer les V_α contenus dans V_0, qui forment évidemment une famille équivalente à celle de tous les V_α. Soit $\varphi(p)$ la fonction continue définie au § 4, partout finie et $\geqslant 0$ dans E, et tendant vers $+\infty$ quand p tend vers le point à l'infini ; et soit F_n l'ensemble des points p où

$$n \leqslant \varphi(p) \leqslant n+1.$$

A tout indice α, nous ferons correspondre un indice β tel que $V_\beta V_\beta \subset V_\alpha$, un indice γ tel que $V_\gamma V_\gamma \subset V_\beta$, et des points p_i, en infinité dénombrable, tels que $\bigcup\limits_i V_\gamma(p_i) = E$ et qu'il n'y ait qu'un nombre fini de p_i dans tout sous-ensemble compact de E ; on pourra par exemple obtenir les p_i en choisissant, dans chacun des F_n, des points $p_i^{(n)}$ en nombre fini tels que $\bigcup\limits_i V_\gamma(p_i^{(n)}) \supset F_n$, et prenant l'ensemble de tous les $p_i^{(n)}$. Soit maintenant R_α le recouvrement formé par les ensembles $V_\beta(p_i)$, et soit $W_\alpha = V_{R_\alpha}$. Les $V_\beta(p_i)$ sont ouverts et compacts ; R_α est localement fini, car sinon il y aurait un ensemble $V_\beta(q)$ ayant des points communs avec une infinité de $V_\beta(p_i)$, donc une infinité de points p_i dans $\overset{-1}{V}_\beta V_\beta(q) \subset V_\alpha(q)$, ce qui n'est pas, puisque $V_\alpha(q)$ est compact. D'après le choix de β on a, quel que soit q, $V_\beta(q) \times V_\beta(q) \subset V_\alpha$, donc $W_\alpha \subset V_\alpha$. Enfin, soit p quelconque, q tel que $q \in V_\gamma(p)$: il y aura un p_i tel que $p \in V_\gamma(p_i)$, d'où $q \in V_\gamma V_\gamma(p_i) \subset V_\beta(p_i)$, et par conséquent $(p,q) \in W_\alpha$, ce qui montre que $V_\gamma \subset W_\alpha$: les W_α forment donc une famille équivalente à celle des V_α, et le théorème est démontré.

Il semble, d'ailleurs, que sur un espace connexe, localement compact, dénombrable à l'infini, la classe de tous les recouvre-

ments ouverts compacts localement finis soit régulière ; mais je n'essayerai pas d'élucider ce point ici.

On sait d'ailleurs que l'existence de recouvrements finis des espaces compacts est à la source de l'application, à la théorie de ces espaces, des méthodes combinatoires ; tout recouvrement fini R possède en effet un *schéma combinatoire*, qui, pour tout système d'ensembles A_λ de R et de complémentaires $\complement(A_\mu)$ de tels ensembles, indique s'il y a, ou non, un point commun aux ensembles du système ; si l'on se restreint aux systèmes formés d'ensembles A de R, on obtient un extrait du schéma combinatoire, dont on se contente le plus souvent, et qui est le *nerf* du recouvrement ; du schéma combinatoire on peut déduire, par divers procédés, des complexes finis qu'on considère comme des approximations de l'espace compact étudié, approximations d'autant meilleures que le recouvrement se compose d'ensembles plus petits : le procédé le plus connu est celui d'Alexandroff, qui consiste à définir directement comme un complexe le nerf du recouvrement. De même, si l'on se donne deux recouvrements finis R, R′, leurs relations mutuelles peuvent être définies aussi par un schéma combinatoire (à savoir celui du recouvrement $R \cap R'$, constitué par toutes les intersections d'un ensemble de R et d'un ensemble de R′) ; et l'espace compact étudié sera complètement défini si l'on se donne les schémas combinatoires d'une classe régulière de recouvrements dans cet espace, ainsi que de leurs relations mutuelles ; réciproquement, on peut énoncer les conditions auxquelles doivent satisfaire de tels schémas pour définir un espace compact. Dans ce cadre général rentre la méthode d'Alexandroff et Kurosh (1) ; il est vrai que celle-ci fait usage de recouvrements fermés qui ne forment pas, au sens de nos définitions, une classe régulière, mais de ces recouvrements on déduit facilement des classes régulières de recouvrements ouverts, et réciproquement. Il est possible, d'ailleurs, que l'application des principes que nous avons exposés ici permette d'apporter plus de souplesse à l'emploi, dans la topologie des espaces compacts, des méthodes combinatoires. Des remarques analogues pourraient être faites sur la

(1) P. Alexandroff, *Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension*, Ann. of Maths., (II) 30 (1928), p. 101 ; et A. Kurosch, *Kombinatorischer Aufbau der bikompakten topologischen Räume*, Comp. Math. vol. 2 (1935), p. 471.

théorie des espaces localement compacts, les recouvrements localement finis prenant alors la place des recouvrements finis, et les complexes infinis celle des complexes finis.

7. Observations sur les axiomes topologiques. — Les mathématiciens qui, depuis une trentaine d'années, se sont occupés de topologie générale, ont introduit dans cette branche des mathématiques un ensemble complètement désordonné de notions et d'axiomes dont on peut se faire une idée, par exemple, en consultant la table des matières du livre que le premier d'entre eux chronologiquement, M. Fréchet, a publié sur *Les espaces abstraits*. Heureusement, la plupart de ces notions sont sans intérêt, comme l'évolution de la science le montre de plus en plus clairement ; et les résultats qui ont été exposés ici permettent encore un peu mieux, je crois, d'en mesurer l'importance respective.

Il semble que les seuls espaces qu'il soit vraiment utile de considérer sont ceux que nous avons appelés, au § 1, les espaces topologiques, c'est-à-dire ceux où l'on a défini la famille des ensembles ouverts de façon qu'elle satisfasse à l'axiome (O_I) : au moyen de tels espaces, on peut définir la notion de fonction continue, qui y satisfait aux théorèmes habituels (en particulier, une fonction continue de fonction continue est continue). Au lieu de partir de la notion d'ensemble ouvert, on pourrait partir de celle de voisinage (avec les axiomes (V_I), $(V_{I'})$), ou de celle d'ensemble fermé, ou de celle de fermeture, ou de celle de point intérieur à un ensemble : en formulant convenablement les axiomes dans chaque cas, ces diverses manières de procéder sont en effet complètement équivalentes.

La possibilité d'établir, dans les espaces satisfaisant au seul axiome (O_I), les propriétés élémentaires des fonctions continues, justifie la place donnée ici, d'après R. de Possel [1], à cet axiome. Cependant, il ne paraît pas qu'on ait eu, jusqu'à présent, à faire usage d'espaces topologiques qui ne satisfassent pas en même temps à l'axiome (O_{II}), et à un axiome de séparation ; c'est dans le choix de ce dernier, qui doit permettre, au moyen

(1) R. de Possel, *Espaces topologiques* (Séminaire de M. Julia, III^e Année (1935-36), pp. 1-18) ; je me suis largement inspiré de cette conférence dans ce § et dans la formulation des axiomes topologiques au § 1.

des ensembles ouverts, de distinguer entre les points de l'espace, que règne encore quelque confusion. Je ne citerai que pour mémoire l'axiome de Kolmogoroff, moins intéressant dans la théorie des espaces topologiques que dans celle des espaces discrets (1) ; mais, cet axiome mis à part, il existe encore huit catégories d'espaces, à savoir les espaces accessibles de Fréchet (satisfaisant à (O_{III})), les espaces de Hausdorff (satisfaisant à (O_{IV})), les espaces réguliers, complètement réguliers, localement normaux, normaux, complètement normaux, et métrisables : chacune de ces catégories comprend la suivante ; les cinq premières sont définies par une condition locale, les trois autres par des conditions globales ; si l'on se borne aux espaces à base dénombrable (c'est-à-dire satisfaisant au IIe axiome de dénombrabilité), les six dernières catégories se confondent ; tout espace compact est normal, tout espace uniforme est complètement régulier.

Or, si l'on admet que les espaces topologiques les plus importants pour l'Analyse sont ceux qui sont définis par une structure uniforme (par exemple les espaces métriques ou les espaces de groupe) ou du moins ceux qui sont capables de recevoir une telle structure, il s'ensuit que la notion essentielle est celle d'espace complètement régulier. Dans cette manière de voir, l'intérêt de l'axiome de Fréchet, (O_{III}), consiste en ce qu'il fournit, dans certaines circonstances (par exemple pour les groupes topologiques), une condition suffisante (et, bien entendu, nécessaire) pour que l'espace soit complètement régulier ; la même remarque s'applique à l'axiome de Hausdorff, (O_{IV}), qui, pour les espaces satisfaisant à l'axiome (C), c'est-à-dire au théorème de Borel-Lebesgue, fournit de même une telle condition suffisante. En même temps, la théorie des espaces uniformes constitue une nouvelle justification du rôle capital et presque prépondérant qu'on a fait jouer jusqu'ici en topologie aux espaces compacts.

D'autre part, notre théorie conduit naturellement à se demander quels sont les espaces topologiques susceptibles d'une structure uniforme pour laquelle ils soient complets : ce serait une

---

(1) Ces espaces ont été introduits, comme on sait, par A. Tucker et P. Alexandroff. Il apparaît de plus en plus que leur théorie, qui n'est autre que celle des ensembles partiellement ordonnés, appartient moins à la topologie qu'elle ne la précède. Cf. P. Alexandroff, *Diskrete Räume*, Mat. Sbornik, t. 2 (44) (1937), p. 501.

catégorie, peut-être nouvelle, d'espaces topologiques, qui ne serait pas non plus sans importance sans doute. Il se pourrait que dans l'étude de cette question il faille faire intervenir l'axiome des espaces normaux, dont nous n'avons pas eu à parler dans le courant de ce travail,mais qui,constituant une propriété commune des espaces compacts et des espaces métriques, a vraisemblablement un rôle à jouer dans la théorie des espaces uniformes.

TABLE DES MATIÈRES

SAINT-AMAND (CHER), FRANCE. — IMPRIMERIE BUSSIÈRE. — 10-3-1938.

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION DE MM.

J. PERRIN
Membre de l'Institut
Prix Nobel de Physique
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris
ATOMISTIQUE

Marcel PRENANT
Professeur à la Sorbonne
I. — BIOLOGIE ÉCOLOGIQUE
II. — LEÇONS DE ZOOLOGIE

A. REY
Professeur à la Sorbonne
HISTOIRE DES SCIENCES

Y. ROCARD
Maître de Recherches
THÉORIES MÉCANIQUES
(Hydrodynamique-Acoustique)

R. SOUÈGES
Chef de Travaux
à la Faculté de Pharmacie
EMBRYOLOGIE
ET MORPHOLOGIE VÉGÉTALES

TAKAGI
Professeur à l'Université Impériale de Tokyo
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

TAMIYA-(HIROSHI)
Membre du Tokugawa Biologisches Institut-Tokyo
BIOLOGIE (Physiologie cellulaire)

A. TCHITCHIBABINE
Membre de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S.
CHIMIE ORGANIQUE
(Série hétérocyclique)

Georges TEISSIER
Sous-directeur de la Station Biologique de Roscoff
BIOMÉTRIE
ET STATISTIQUE BIOLOGIQUE

G. URBAIN
Membre de l'Institut
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris
THÉORIES CHIMIQUES

Pierre URBAIN
Maître de Conférences à l'Institut d'Hydrologie et de Climatologie de Paris
GÉOCHIMIE

Y. VERLAINE
Professeur à l'Université de Liége
PSYCHOLOGIE ANIMALE

P. WEISS
Membre de l'Institut
Directeur de l'Institut de Physique de l'Université de Strasbourg
MAGNÉTISME

R. WURMSER
Directeur du Laboratoire de Biophysique de l'Ecole des Hautes Etudes
BIOPHYSIQUE

Actualités Scientifiques et Industrielles

Série 1937 ***(suite)*** **:**

564. BALACHOWSKY (A.). Les cochenilles de France, d'Europe du Nord, de l'Afrique et du bassin méditerranéen. Caractères généraux des cochenilles. Morphologie interne. IIe partie.......... 20 fr.
565. HACHTROUDI (M.). Les espaces d'éléments à connexion projective normale.......... 25 fr.
566. GUICHARD (M.). Essai sur les mesures scientifiques. I. De la sensation à la méthode de mesure.......... 10 fr.
567. GUICHARD (M.). II. Aperçu historique sur les mesures chimiques. *a*) avant Lavoisier ; *b*) avec Lavoisier.......... 10 fr.
568. GUICHARD (M.). III. Aperçu historique sur les mesures chimiques. *c*) après Lavoisier 12 fr.
569. JEUNEHOMME (W.). Calcul des équilibres physico-chimiques à l'aide des données de la spectroscopie.......... 25 fr.
570. VALIRON (G.). Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes et de leurs dérivées.......... 15 fr.
571. VASILESCO (F.). La notion de capacité.......... 15 fr.
572. ENRIQUES (F.) et DE SANTILLANA (G.). Le problème de la connaissance. Empirisme et rationalisme grecs.......... 15 fr.
573. ENRIQUES (F.) et DE SANTILLANA (G.). Platon et Aristote.......... 15 fr.
574. BEDEAU (F.). Théorie et technique du bruit de fond (Effets Schottky et Termique).. 25 fr.
575. BRUNSCHWICG (L.). L'actualité des problèmes platoniciens.......... 8 fr.

LISTE COMPLÈTE A LA FIN DU VOLUME

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE R. BUSSIÈRE.